Ueber die

Induction in rotirenden Kugeln.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VON DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

GENEHMIGT

UND

ÖFFENTLICH ZU VERTHEIDIGEN

am 15. März 1880

VON

Heinrich Hertz

aus Hamburg.

OPPONENTEN:

Herr Dr. med. C. Günther.
- Cand. phil. F. Schulze-Berge.
- Stud. jur. G. Hertz.

BERLIN.

Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke).

Linienstr. 158.

Ex Bibliotheca
Universitatis
Frider. Guil.
Berolin.

Die Wechselwirkungen zwischen Magneten und rotirenden Metallmassen, welche Arago entdeckt hatte, wurden zuerst von Faraday als Erscheinungen elektrodynamischer Anziehung aufgefasst und auf Ströme zurückgeführt, welche in den Metallmassen durch die Magnete inducirt werden. Es gelang Faraday, das Vorhandensein derartiger Ströme nachzuweisen, und die Natur des Phänomens als einer Inductionserscheinung ausser Zweifel zu setzen.

Der erste Versuch, die inzwischen ausgebildete Theorie auf einige hierhergehörige Erscheinungen anzuwenden, wurde im Jahre 1853 von Felici gemacht. Es gelang demselben, unter vereinfachten Bedingungen angenäherte Lösungen zu erhalten, die den Beobachtungen für das Erste hinreichend entsprachen.

Viel weiter ging im Jahre 1864 Herr Jochmann. Derselbe leitete, vom Weber'schen Gesetze ausgehend, die vollständigen Differentialgleichungen des Problems ab, und integrirte dieselben für den Fall, dass der rotirende Körper eine unendlich ausgedehnte ebene Platte oder eine Kugel sei. Seine Rechnungen fanden sich in schönster Uebereinstimmung mit den Beobachtungen. Freilich musste er die vereinfachende Annahme machen, dass die Rotationsgeschwindigkeit sehr klein sei, den Einfluss der Selbstinduction vermochte er nicht zu bestimmen.

Endlich hat im Jahre 1872 Herr Maxwell in sehr eleganter Weise die Theorie der Induction in einer unendlich ausge-

dehnten, sehr dünnen Platte gegeben und gezeigt, wie sich dieselbe auf die Arago'sche Scheibe anwenden lässt.

In der vorliegenden Arbeit ist das Problem vollständig gelöst für den Fall, dass der betrachtete Körper eine um einen Durchmesser rotirende Kugel oder Hohlkugel sei. Die inducirenden Magnete können dabei im äussern, oder, bei Hohlkugeln, im innern Raum liegen. Auch auf den Fall ist die Lösung ausgedehnt, dass die Masse der Kugel magnetische Polarität anzunehmen vermag. Offenbar umschliesst dies Problem die früher gelösten als specielle Fälle.

Die erhaltenen Resultate habe ich durch einige Zeichnungen zu veranschaulichen gesucht.

---

§ 1.

Festsetzung der Bezeichnungen.

In diesem Paragraphen sollen die Bezeichnungen festgesetzt, und einige bekannte Formeln, die ich beständig gebrauchen werde, zusammengestellt werden.

1. Das angewandte Coordinatensystem ist das Taf. 1a. dargestellte. Die als positiv geltenden Drehungsrichtungen sind in die Figur eingezeichnet. Die z Achse falle mit der Rotationsachse zusammen. Als Polarcoordinaten mögen verwendet werden ϱ, ω, θ. ω entspreche der geographischen Länge, sei 0 in der xz Ebene bei positiven x und wachse im Sinne der positiven Drehung, θ entspreche dem Complement der geographischen Breite und sei 0 in der positiven z Achse. Gelegentlich möge die Bezeichnung benutzt werden: Coordinaten.

$$x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \omega_z} = \frac{\partial}{\partial \omega}$$
$$z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \omega_y}$$
$$y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \omega_x}$$

ferner werde der Differentialquotient $\frac{\partial}{\partial \omega}$ nach Lagrange's Weise bezeichnet, also z. B.

$$\frac{\partial \chi}{\partial \omega} = \chi'.$$

Bezeichnung der elektrischen Grössen.

2. Die Rechnungen seien in elektromagnetischem Maasse geführt. Im Uebrigen seien die Bezeichnungen für die elektrischen Grössen diejenigen, welche von Herrn Geheimrath Helmholtz im 72. Bande des Borchardt'schen Journales eingeführt sind. Es seien also:

$$u, v, w, \quad \frac{mgr^{\frac{1}{2}}}{mm^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{sec}}$$

die Dichtigkeiten der Strömung nach den x, y, z;

$$\begin{matrix} U \\ V \\ W \end{matrix} \quad \frac{mm^{\frac{1}{2}}\, mgr^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{sec}}$$

die entsprechenden Componenten des Vectorpotentiales;

$$\varphi \quad \frac{mm^{\frac{3}{2}}\, mgr^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{sec}^2}\ ^*)$$

die Potentialfunction der freien Elektricität;

$$\varkappa \quad \frac{mm^2}{\mathrm{sec}}$$

der specifische Widerstand des Materiales. Der specifische Widerstand einer Fläche von verschwindender Dicke δ, nämlich $\frac{\varkappa}{\delta}$, werde, wenn er als endlich betrachtet wird, bezeichnet mit

$$k \quad \frac{mm}{\mathrm{sec}}.$$

Es seien ferner

$$\begin{matrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{matrix} \quad \frac{mgr^{\frac{1}{2}}}{mm^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{sec}}$$

die Componenten einer magnetischen Polarisation;

$$\begin{matrix} L \\ M \\ N \end{matrix} \quad \frac{mgr^{\frac{1}{2}}\, mm^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{sec}}$$

*) Dies ist nicht elektromagnetisches Maass. In letzterem gemessen ist die Potentialfunktian der freien Elektricität $\varphi_m = \varphi A^2$, wenn $\frac{1}{A}$ die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Obige Einheit vermeidet den lästigen Faktor $\frac{1}{A^2}$.

die Potentiale der $\lambda\ \mu\ \nu$, letztere als Massen gedacht,

$$\theta \quad (0)$$

die magnetische Polarisationsconstante,

$$\chi \quad \frac{mm^{\frac{1}{2}}\, mgr^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{sec}}$$

das magnetische Potential; jedoch soll nur derjenige Theil desselben so bezeichnet werden, welcher thatsächlich von Magneten herrührt, das magnetische Potential der inducirten Strömungen sei

$$\Omega \quad \frac{mm^{\frac{1}{2}}\, mgr^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{sec}}$$

Ω verliert seine Bedeutung in der Masse der Hohlkugel, kann also durch dieselbe nicht fortgesetzt werden, ist also eindeutig im innern und äussern Raum.

Mit

$$\psi \quad \frac{mm^{\frac{1}{2}}\, mgr^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{sec}}$$

werde die Strömungsfunktion in einer unendlich dünnen Hohlkugel bezeichnet. Um jede Zweideutigkeit im Bezug auf die Vorzeichen zu vermeiden, ist hier die Bestimmung für ψ: Wächst bei Durchlaufung einer Strecke ds ψ um $d\psi$, so ist $d\psi$ die den zurückgelegten Weg von der Linken zur rechten Seite in der Zeiteinheit durchströmende positive Elektricitätsmenge. Bei Durchlaufung des Weges sind die Füsse gegen den Mittelpunkt der Kugel, das Angesicht gegen das Ziel gewandt zu denken.

Da wir es im folgenden nur mit Strömungen zu thun haben, die in concentrischen Kugelschaalen um den Nullpunkt erfolgen, so können und wollen wir

$$\psi \quad \frac{mgr^{\frac{1}{2}}}{mm^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{sec}}$$

etwas allgemeiner definiren als eine Funktion von ϱ, θ, ω, derart, dass $da\ \psi_{(\varrho=a)}$ die Strömungsfunktion der Schicht zwischen $\varrho = a$ und $\varrho = a + da$ darstellt.

Den angeführten Grössen sind zur Bequemlichkeit ihre Einheiten beigefügt.

Maasse der betrachteten Kugel.

3. Der äussere Radius der betrachteten Hohlkugel sei R, der innere r. Die Drehungsgeschwindigkeit der Kugel sei ω.

Entwickelung nach Kugelfunktionen.

4. Wird eine Funktion χ, die in einem beliebigen Raum der Gleichung $\Delta\chi = o$ genügt, nach Kugelfunktionen entwickelt, so soll χ_n dasjenige Glied bezeichnen, welches den Faktor ϱ^n enthält, und diese Bezeichnung soll, wenn nicht näheres bestimmt wird, auch negative n umfassen.

Bei weiterer Zerlegung von χ_n gelte die Bezeichnung:

für positive n:

$$\chi_n = \varrho^n Y_n,$$

für negative n:

$$\chi_n = \varrho^n Y_{-n-1},$$

$$Y_n = \sum_{o}^{n} i\,(A_{ni}\cos i\omega + B_{ni}\sin i\omega)\,P_{ni}(\theta),$$

für alle n gelten die Gleichungen:

$$\Delta\chi_n = 0$$

$$x\frac{\partial\chi_n}{\partial x} + y\frac{\partial\chi_n}{\partial y} + z\frac{\partial\chi_n}{\partial z} = n\chi_n.$$

Die $m$ten Differentialquotienten von χ_n nach den $x\,y\,z$ sind Kugelfunktionen $n-m$ter Ordnung, sofern nicht ein vorangegangener der nullten Ordnung wird. Die Ausdrücke

$$\frac{\partial\chi_n}{\partial\omega_x},\ \frac{\partial\chi_n}{\partial\omega_y},\ \frac{\partial\chi_n}{\partial\omega_z}$$

sind Kugelfunktionen $n$ter Ordnung.

Ferner ist

$$\Delta\,(\varrho^m Y_n) = (m-n)\,(m+n+1)\,\varrho^{m-2} Y_n$$

$$x\frac{\partial\,(\varrho^m Y_n)}{\partial x} + y\frac{\partial\,(\varrho^m Y_n)}{\partial y} + z\frac{\partial\,(\varrho^m Y_n)}{\partial z} = m\varrho^m Y_n$$

$$\frac{\partial\,(\varrho^m Y_n)}{\partial\varrho} = \frac{m}{\varrho}\,(\varrho^m Y_n).$$

5. Es sei ψ die Strömungsfunktion einer Kugelschaale vom Radius R, es sei $\Psi = \int\frac{\psi\,ds}{r}$ das Potential einer Masse, welche auf der Kugelschaale mit der Dichtigkeit ψ verbreitet ist, so ist das Potential der Strömung:

Sätze über die Strömung in Kugelschaalen.

$$\Omega = -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varrho}(\Psi\varrho)$$

und die Grössen $U\ V\ W$ sind:

$$U = \frac{y}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial z} - \frac{z}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial y} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\omega_x}\Psi$$

$$V = \frac{z}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{x}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\omega_y}\Psi$$

$$W = \frac{x}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial y} - \frac{y}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\omega_z}\Psi.$$

Ist Ψ eine homogene Funktion $n$ten Grades in x, y, z, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{n+1}{R}\frac{\partial}{\partial z}\Psi$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{n+1}{R}\frac{\partial}{\partial y}\Psi$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{n+1}{R}\frac{\partial}{\partial x}\Psi.$$

Immer ist:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial\Omega}{\partial z}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial\Omega}{\partial y}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}.$$

Man findet diese Formeln entwickelt in Maxwell's Treatise on electricity, Vol. II, pag. 276. Die Vorzeichen sind dort theilweise andere, es liegt dies daran, dass dort nicht unser Coordinatensystem, sondern das symmetrische angewandt ist. Das hier benutzte Coordinatensystem ist dasjenige, auf welches sich die Helmholtz'schen Formeln beziehen.

Formeln für die elektromotorischen Kräfte.

6. Für die elektromotorischen Kräfte, welche die als unveränderlich vorausgesetzten Componenten des Vectorpotentiales $U\ V\ W$ in dem mit den Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ bewegten Elemente hervorrufen, sind die Formen angenommen:

$$\mathfrak{X} = \beta\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) - \gamma\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)$$
$$\mathfrak{Y} = \gamma\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) - \alpha\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$
$$\mathfrak{Z} = \alpha\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) - \beta\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

Es sind dies die von Herrn Jochmann aufgestellten Formen. Die Abänderung, welche die Formeln des Potentialgesetzes an den Resultaten hervorrufen würden, sind in § 8 besprochen.

Wirken ausser den Strömungen $u\ v\ w$, Magnete $\lambda\ \mu\ \nu$, so ist für diesen Theil der Induction in obigen Formeln zu ersetzen:

$$U \qquad \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}$$
$$V \quad \text{durch} \quad \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}$$
$$W \qquad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Die so erhaltenen Formeln gelten auch dann, wenn sich die Magnete im Innern der rotirenden Masse befinden. Befinden sich die Magnete nur ausserhalb der Masse, so wird, da in der Masse

$$\Delta L = 0,\ \Delta M = 0,\ \Delta N = 0,$$
$$\mathfrak{X} = \beta\frac{\partial \chi}{\partial z} - \gamma\frac{\partial \chi}{\partial y}$$
$$\mathfrak{Y} = \gamma\frac{\partial \chi}{\partial x} - \alpha\frac{\partial \chi}{\partial z}$$
$$\mathfrak{Z} = \alpha\frac{\partial \chi}{\partial y} - \beta\frac{\partial \chi}{\partial x}$$

für die Elemente unserer Kugel ist

$$\alpha = -\omega y,\ \beta = \omega x,\ \gamma = 0.$$

§ 2.

Lösung bei Vernachlässigung der Selbstinduction.

In diesem Paragraphen soll das Problem für den Fall gelöst werden, dass von der Wirkung der Selbstinduction abgesehen werden kann. Für die Strömungen $u\ v\ w$ bestehen die Gleichungen

$$\varkappa u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathfrak{X}$$
$$\varkappa v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathfrak{Y}\ ^*)$$
$$\varkappa w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mathfrak{Z};$$

ferner, da die Strömung stationär ist, im Innern

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

und für $\varrho = R$ und $\varrho = r$,

$$ux + vy + wz = 0.$$

Hieraus ergeben sich für φ die Bedingungen:
im Innern:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z},$$

und an der Oberfläche:

$$\varrho\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = x\mathfrak{X} + y\mathfrak{Y} + z\mathfrak{Z},$$

welche φ bis auf eine additive Constante bestimmen.

Das Potential der im äussern und innern Raum befindlichen Magneten sei nach Kugelfunktionen entwickelt:

$$\chi = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^n\ \chi_n.$$

Wir betrachten jedes Glied für sich und setzen daher das äussere Potential $= \chi_n$.

*) Unter Annahme der hier für φ gebrauchten Einheiten.

Dann ist

$$\mathfrak{x} = \omega\, x \frac{\partial \chi_n}{\partial z}$$

$$\mathfrak{y} = \omega\, y \frac{\partial \chi_n}{\partial z}$$

$$\mathfrak{z} = -\omega y \frac{\partial \chi}{\partial y} - \omega\, x \frac{\partial \chi}{\partial x} = \omega\, z \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - \omega n \chi_n.$$

Daraus folgen für φ die Bedingungen:

In der Masse der Hohlkugel

Bestimmung des elektrischen Potentiales.

a) $$\Delta \varphi = 2\omega \frac{\partial \chi_n}{\partial z}$$

für $\varrho = r$ und $\varrho = R$:

b) $$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{\omega}{\varrho}\left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right).$$

Eine Lösung dieser Gleichungen ist:

$$\varphi = \frac{\omega}{n+1}\left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right).$$

Denn es ist

$$\Delta\left(\varrho^2 \frac{\partial \chi}{\partial z} - nz\chi_n\right)$$

$$= 2(2n+1)\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - 2n \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \qquad (\S\ 1{,}4)$$

$$= 2(n+1)\frac{\partial \chi_n}{\partial z},$$

so dass die Gleichung für das Innere befriedigt ist. Ferner ist φ ein Produkt aus ϱ^{n+1} und einer Funktion der Winkel θ und ω, daraus ergiebt sich leicht, dass φ der Grenzgleichung genügt.

Der Werth der Constanten, welchen man zu obigem Ausdruck zu addiren hat, um die allgemeine Lösung zu erhalten, hängt in jedem Falle von den elektrostatischen Einflüssen ab, denen die Kugel ausgesetzt ist. Es kann der Kugel in jedem Falle so viel freie Elektricität zugeführt werden, dass die Constante gleich Null wird, und es sei dies in der Folge vorausgesetzt.

Aus φ folgt unmittelbar:

$$u = \frac{\omega}{\varkappa}\left\{-\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right) + x\frac{\partial \chi}{\partial z}\right\}$$

$$v = \frac{\omega}{\varkappa}\left\{-\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right) + y\frac{\partial \chi}{\partial z}\right\}$$

Bestimmung von u, v, w.

$$w = \frac{\omega}{\varkappa}\left\{-\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right) + z\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - n\chi_n\right\}.$$

Multipliciren wir diese Gleichungen mit $x\ y\ z$ und addiren, so folgt $$ux + vy + wz = 0.$$

Die Strömung ist also überall senkrecht zum Radius, sie findet in concentrischen Kugelschaalen um den Nullpunkt statt. Es ist dies eine Folge des Umstandes, dass Gleichung b) nicht nur an der Oberfläche, sondern in der ganzen Masse erfüllt ist.

Weiter findet man

$$\Delta u = \frac{\omega}{\varkappa}\left\{-2\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} + 2\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z}\right\} = 0$$

$$\Delta v = 0$$

$$\Delta w = 0, \text{ da auch } \Delta \chi_n = 0.$$

Uebrigens sind $u\ v\ w$ homogene Funktionen $n$ten Grades in x, y, z; es sind also $u\ v\ w$ durch Kugelfunktionen $n$ten Grades dargestellt. Wir werden für $u\ v\ w$ alsbald einfachere Formen finden.

Da die Strömungen in den concentrischen Kugelschichten einander ähnlich sind, so sind sie auch ähnlich denjenigen, welche in einer unendlich dünnen Hohlkugel entstehen, wir wenden uns daher zunächst zu einer solchen und bestimmen den Werth der Integrale $U\ V\ W$, und zwar für den innern Raum, wenn n positiv ist; für den äussern Raum, wenn n negativ ist. Nur der erstere Fall soll durchgerechnet werden. $\varkappa$ ersetzen wir durch k. Für $U\ V\ W$ gelten die Bedingungen:

$$\Delta U = 0,\ \Delta V = 0,\ \Delta W = 0$$

im ganzen Raum, an der Kugelschaale

$$\frac{\partial U_a}{\partial \varrho} - \frac{\partial U_i}{\partial \varrho} = -4\pi u,$$

entsprechend für V und W; ausserdem die gewöhnlichen Stetigkeitsbedingungen. Allen diesen Bedingungen ist genügt, wenn man setzt:

Aufsuchung der Funktion Ψ.

$$U_i = \frac{4\pi R}{2n+1}\,\frac{\omega}{k}\left\{-\frac{1}{n+1}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right) + x\frac{\partial \chi_n}{\partial z}\right\}$$

$$V_i = \frac{4\pi R}{2n+1}\,\frac{\omega}{k}\left\{-\frac{1}{n+1}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right) + y\frac{\partial \chi_n}{\partial z}\right\}$$

$$W_i = \frac{4\pi R}{2n+1}\,\frac{\omega}{k}\left\{-\frac{1}{n+1}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right) + z\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right\}$$

$$U_a(\varrho) = \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+1} U_i\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

$$V_a(\varrho) = \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+1} V_i\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

$$W_a(\varrho) = \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+1} W_i\left(\frac{1}{\varrho}\right).$$

Aus diesen $U\,V\,W$ wollen wir die magnetisirenden Kräfte im Innern, nämlich

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \text{ etc.}$$

berechnen, und dieselben

$$= -\frac{n+1}{R}\,\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \text{ etc.}$$

setzen, wir erhalten so die Funktion Ψ (§ 1,5). Wir finden nämlich:

$$-\frac{4\pi R}{2n+1}\,\frac{\omega}{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(x\frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y\frac{\partial \chi_n}{\partial z}\right) = -\frac{n+1}{R}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\psi_i$$

$$-\frac{4\pi R}{2n+1}\,\frac{\omega}{k}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y\frac{\partial \chi_n}{\partial x}\right) = -\frac{n+1}{R}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\psi_i$$

$$-\frac{4\pi R}{2n+1}\,\frac{\omega}{k}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y\frac{\partial \chi_n}{\partial x}\right) = -\frac{n+1}{R}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\psi_i.$$

Also ergiebt sich

$$\psi_i = \frac{4\pi R^2}{(2n+1)(n+1)}\,\frac{\omega}{k}\left(x\frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y\frac{\partial \chi_n}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{4\pi R^2}{(2n+1)(n+1)}\,\frac{\omega}{k}\,\chi_n',$$

und es folgen jetzt die übrigen Attribute der Strömung ohne Weiteres aus ψ. Eine willkürliche Constante, welche noch zu ψ hinzugefügt werden kann, ist ohne Belang.

Sonach erhalten wir die Lösung unserer Aufgabe für eine Kugelschaale in folgender Form (§ 1,5):

Es sei

$$\chi_n = \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n \quad n > 0$$

die inducirende Potentialfunktion, dann ist:

$$\psi_i = \frac{4\pi R^2}{(2n+1)(n+1)}\,\frac{\omega}{k}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n'$$

$$\psi_a = \frac{4\pi R^2}{(2n+1)(n+1)}\,\frac{\omega}{k}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} Y_n'$$

$$\psi = \frac{\omega}{k}\,\frac{R}{n+1}\,Y_n'$$

Zusammenstellung der Formeln.

$$\Omega_i = -\frac{4\pi R}{2n+1}\,\frac{\omega}{k}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n'$$

$$\Omega_a = \frac{4\pi R n}{(2n+1)(n+1)}\,\frac{\omega}{k}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} Y_n'.$$

Aus den Relationen

$$U = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial \omega_x}\,\psi, \quad \frac{\partial U_a}{\partial \varrho} - \frac{\partial U_i}{\partial \varrho} = -4\pi u$$

und den entsprechenden für V und W erhält man ferner:

$$u = \frac{1}{R}\,\frac{\partial \psi}{\partial \omega_x} = \frac{1}{n+1}\,\frac{\omega}{k}\,\frac{\partial Y_n'}{\partial \omega_x}$$

$$v = \frac{1}{R}\,\frac{\partial \psi}{\partial \omega_y} = \frac{1}{n+1}\,\frac{\omega}{k}\,\frac{\partial Y_n'}{\partial \omega_y}$$

$$w = \frac{1}{R}\,\frac{\partial \psi}{\partial \omega_z} = \frac{1}{n+1}\,\frac{\omega}{k}\,\frac{\partial Y_n'}{\partial \omega_z}.$$

Endlich lässt sich der Ausdruck für das elektrische Potential in der Masse der Hohlkugel umformen. Setzt man für den Augenblick $\varrho' = \varrho \sin\theta$, so ist

$$\varphi = \frac{\omega}{n+1}\left(\varrho'\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z\frac{\partial \chi_n}{\partial \varrho'}\right)$$

oder

$$\varphi = -\frac{\omega}{n+1}\varrho \sin\theta \frac{\partial \chi_n}{\partial \theta},$$

und in der Kugelschaale

$$\bar{\varphi} = -\frac{\omega R}{n+1}\sin\theta \frac{\partial Y_n}{\partial \theta}$$

Ganz ähnliche Rechnungen lassen sich durchführen, wenn n negativ ist, sich also die inducirenden Magnete im Innern befinden. Wir erhalten aus denselben das Resultat:

Ist die inducirende Potentialfunktion

$$\chi_n = \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} Y_n,$$

so ist

$$\Psi_i = -\frac{4\pi R^2}{(2n+1)n}\frac{\omega}{k}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n'$$

$$\Psi_a = -\frac{4\pi R^2}{(2n+1)n}\frac{\omega}{k}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} Y_n'$$

$$\Omega_i = \frac{4\pi R(n+1)}{(2n+1)n}\frac{\omega}{k}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n'$$

$$\Omega_a = -\frac{4\pi R}{2n+1}\frac{\omega}{k}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} Y_n'$$

$$\psi = -\frac{\omega}{k}\frac{R}{n} Y_n'$$

$$u = -\frac{1}{n}\frac{\omega}{k}\frac{\partial Y_n'}{\partial \omega_x}$$

$$v = -\frac{1}{n}\frac{\omega}{k}\frac{\partial Y_n'}{\partial \omega_y}$$

$$w = -\frac{1}{n}\frac{\omega}{k}\frac{\partial Y_n'}{\partial \omega_z}$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\omega}{n} R \sin\theta \frac{\partial Y_n}{\partial \theta}.$$

Von den hier angeführten Grössen gehen ψ, u, v, w, φ unmittelbar aus den früheren durch Vertauschung von n mit $-n-1$ hervor.

Zu der erhaltenen Lösung mache ich die folgenden Bemerkungen:

1. Rotirt eine Hohlkugel von endlicher Dicke unter dem Einfluss des Potentiales χ_n (n pos. oder neg.), so sind die inducirten Strömungen:

$$u = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\omega}{\varkappa}\cdot\frac{\partial \chi_n'}{\partial \omega_x}$$

$$v = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\omega}{\varkappa}\cdot\frac{\partial \chi_n'}{\partial \omega_y}$$

$$w = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\omega}{\varkappa}\cdot\frac{\partial \chi_n'}{\partial \omega_z}$$

und ihre Strömungsfunktion ist:

$$\psi = \frac{\varrho}{n+1}\cdot\frac{\omega}{\varkappa}\cdot\chi_n'.$$

2. Es sei χ_n noch weiter zerlegt, wir betrachten das Glied

$$\chi_{ni} = A_{ni}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \cos i\omega\, P_{ni}.$$

Dazu gehört die Strömungsfunktion:

Construktion der Strömungslinien.

$$\psi_{ni} = -\frac{\varrho}{n+1}\frac{\omega i}{\varkappa} A_{ni}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \sin i\omega\, P_{ni}.$$

Daraus ergiebt sich folgende einfache Construction für die Strömungslinien, welche ein derartiges einfaches Potential hervorruft:

Man zeichne auf eine beliebige Kugelschicht die Linien gleichen Potentiales auf, und drehe hierauf die Schicht um den Winkel $\frac{1}{i}\frac{\pi}{2}$, die gezeichneten Linien stellen jetzt die Stromlinien dar, welche unter dem Einfluss jenes Potentiales entstehen.

Rotirt beispielsweise die Kugel unter dem Einfluss einer constanten Kraft, deren Richtung zur Rotationsaxe senkrecht ist, so erfüllt das äussere Potential die hier gestellten Bedingungen, es ist $n = 1$, $i = 1$. Die Niveaulinien des Potentials auf der Kugel sind Kreise, also sind auch die Strömungslinien

Kreise. Die Ebenen ersterer sind parallel zur Rotationsaxe und senkrecht zur Richtung der Kraft, sonach sind die Ebenen letzterer parallel zur Richtung der Kraft und zur Rotationsaxe.

Umformung der Lösung.

3. Wir können den Werth von ψ in eine Form bringen, welche die Summation über sämmtliche Kugelfunktionen erlaubt, also die Zerlegung des äussern Potentials nach solchen überflüssig macht.

Es sei n positiv, dann ist

$$\int_0^\varrho \chi_n \, d\varrho = \frac{\varrho}{n+1} \chi_n.$$

Sei zweitens n negativ, dann ist

$$\int_\infty^\varrho \chi_n \, d\varrho = \frac{\varrho}{n+1} \chi_n.$$

Also ist für positive n

$$\psi = \frac{\omega}{\varkappa} \int_0^\varrho \frac{\partial \chi_n}{\partial \omega} \, d\varrho$$

und für negative n

$$\psi = -\frac{\omega}{\varkappa} \int_\varrho^\infty \frac{\partial \chi_n}{\partial \omega} \, d\varrho.$$

Summation über die Kugelfunktionen.

Diese Ausdrücke lassen ohne Weiteres die Summation zu, und wir erhalten folgende zweite Form der Lösung:

Bezeichnet χ_i den Theil des Potentiales, welcher von inneren, χ_a den Theil, welcher von äusseren Magneten herrührt, so ist

$$\psi = \frac{\omega}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \int_0^\varrho \chi_a \, d\varrho - \int_\varrho^\infty \chi_i \, d\varrho \right\}.$$

Ebenso ergiebt sich

$$\varphi = -\omega \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \int_0^\varrho \chi_a \, d\varrho - \int_\varrho^\infty \chi_i \, d\varrho \right\}.$$

Für eine unendlich dünne Kugelschaale vom Radius R wird:

$$\psi = \frac{\omega}{k} \left\{ \int_0^R \frac{\partial \chi_a}{\partial \omega} \, d\varrho - \int_R^\infty \frac{\partial \chi_i}{\partial \omega} \, d\varrho \right\}$$

$$\varphi = -\omega \sin\theta \left\{ \int_0^R \frac{\partial \chi_a}{\partial \theta} \, d\varrho - \int_R^\infty \frac{\partial \chi_i}{\partial \theta} \, d\varrho \right\}.$$

Daraus folgt zwischen φ und ψ die Bezeichnung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} + \varkappa \sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0.$$

§ 3.

Vollständige Lösung für unendlich dünne Hohlkugeln.

Es soll jetzt die Wirkung der Selbstinduction in Betracht gezogen werden, es werde jedoch in diesem Paragraphen die Betrachtung auf eine unendlich dünne Kugelschaale beschränkt. Der Einfachheit halber werde in der ausgeführten Rechnung n als positiv vorausgesetzt.

Einer üblichen Anschauungsweise folgend, betrachten wir zunächst den gesammten Inductionsact als eine unendliche Reihe einzelne Inductionen; die von den äussern Magneten inducirte Strömung inducirt eine zweite, diese eine dritte, und so fort ins Unendliche. Wir berechnen alle diese Ströme und addiren sie, so lange die Summe gegen einen endlichen Grenzwerth convergirt, stellt dieser sicherlich die thatsächlich stattfindende Strömung dar.

Sei

$$\chi_n = \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n$$

ein Theil der äussern Potentialfunktion. Das von dieser inducirte Potential ist:

$$\Omega_i = -\frac{4\pi R}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{k} \cdot \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n'$$

$$\Omega_a = \frac{4\pi R n}{(2n+1)(n+1)} \cdot \frac{\omega}{k} \cdot \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} Y_n'.$$

Berechnung der successiven Inductionen.

Lassen wir erstens innerhalb der Hohlkugel eine zweite rotiren, welche der ersten unendlich nahe sei und sich mit gleicher Geschwindigkeit bewege, so wird in dieser von den Strömen erster Ordnung (Ω_i) eine Strömung inducirt, deren magnetisches Potential im Innern ist:

$$\Omega_i' = \left(\frac{4\pi R}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{k}\right)^2 \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n''.$$

Lassen wir zweitens ausserhalb der ursprünglichen Hohlkugel eine zweite rotiren, die der ersten unendlich nahe sei, so wird in dieser durch den Einfluss der Ströme erster Ordnung (Ω_a) eine Strömung inducirt werden, deren Potential im Innern ist:

$$\Omega_i' = \frac{4\pi R n}{(2n+1)(n+1)} \frac{\omega}{k} \cdot \frac{4\pi R(n+1)}{(2n+1)n} \frac{\omega}{k} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n''$$
$$= \left(\frac{4\pi R}{2n+1} \frac{\omega}{k}\right)^2 \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n''.$$

Beide Ausdrücke für Ω' fallen zusammen. Mit beiden fällt daher auch das Potential derjenigen Strömung zusammen, welche die Strömung erster Ordnung in der Kugelschaale selber inducirt. Indem wir in ganz derselben Weise die folgenden Inductionen berechnen und Alles addiren, erhalten wir für die Gesammtwirkung:

$$\Omega_i = \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \sum_1^\infty m \left(-\frac{4\pi R\omega}{(2n+1)k}\right)^m \frac{\partial^m Y_n}{\partial \omega^m}$$

$$\Omega_a = -\frac{n}{n+1} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} \sum_1^\infty m \left(-\frac{4\pi R\omega}{(2n+1)k}\right)^m \frac{\partial^m Y_n}{\partial \omega^m}$$

$$\psi = -\frac{2n+1}{4\pi(n+1)} \sum_1^\infty m \left(-\frac{4\pi R\omega}{(2n+1)k}\right)^m \frac{\partial^m Y_n}{\partial \omega^m}.$$

Die erhaltenen Ausdrücke lassen sich weiter entwickeln, wenn man Y_n noch weiter zerlegt. Man hat:

$$Y_n = \sum_0^n i \, (A_{ni} \cos i\omega + B_{ni} \sin i\omega) \, P_{ni}.$$

Wir beschränken die Untersuchung auf ein Glied dieser Reihe, und sei also:

$$Y_n = A_{ni} \cos i\omega \, P_{ni}.$$

Dann haben wir:

$$\Omega_i = A_{ni} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n P_{ni} \left\{ \frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k} \sin i\omega - \left(\frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k}\right)^2 \cos i\omega \right.$$
$$\left. - \left(\frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k}\right)^3 \sin i\omega + \left(\frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k}\right)^4 \cos i\omega + \ldots \right\}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k} = h, \quad (h \text{ ist eine reine Zahl})$$

so wird jetzt:

$$\Omega_i = A_{ni} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n P_{ni} \, (\sin i\omega - h \cos i\omega)$$
$$\times (1 - h^2 + h^4 - h^6 + \ldots) h.$$

Ist h ein ächter Bruch, so convergirt die in Ω enthaltene Reihe und wir erhalten:

$$\Omega_i = A_{ni} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \frac{h}{1+h^2} (\sin i\omega - h \cos i\omega) \, P_{ni}$$

$$\Omega_a = -\frac{n}{n+1} A_{ni} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} \frac{h}{1+h^2} (\sin i\omega - h \cos i\omega) \, P_{ni}$$

$$\psi = -\frac{2n+1}{4\pi(n+1)} \frac{h}{1+h^2} (\sin i\omega - h \cos i\omega) \, P_{ni}.$$

Ist $h > 1$*), so divergirt die in Ω vorkommende Reihe, und die Auffassung des Phänomens als einer Reihe successiver Inductionen ist nicht mehr zulässig, da jede folgende grösser als die vorhergehende werden würde.

Nichtsdestoweniger gelten die aufgestellten Formeln für jedes h, wie man leicht a posteriori verificirt und auch durch dieselben Schlüsse ableiten kann, welche wir bei Hohlkugeln

*) Eine kupferne Hohlkugel von 50 mm Radius, 2 mm Wandstärke, muss beiläufig ca. 87 Umdrehungen in der Sekunde machen, damit für $i = 1$, $n = 1$, $h = 1$ werde.

von endlicher Dicke anzuwenden haben werden. Da ich die vorliegenden Formeln nochmals aus den allgemeinen ableiten werde, will ich mich hier nicht bei denselben aufhalten.

Wir setzen noch:

$$\operatorname{tg} \delta = h,$$

dann können wir schreiben:

$$\Omega_i = A_{ni}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \sin\delta \sin(i\omega - \delta) P_{ni}$$

Die Lösung:

$$\Omega_a = -\frac{n}{n+1} A_{ni}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} \sin\delta \sin(i\omega - \delta) P_{ni}$$

$$\psi = -\frac{2n+1}{4\pi(n+1)} \sin\delta \sin(iw - \delta) P_{ni}.$$

Das Resultat ist also das folgende:

1. Die Strömungsfunktion, welche eine einfache Kugelfunktion inducirt, ist eine einfache Kugelflächenfunktion derselben Art, wie diejenige, welche in der inducirenden Funktion enthalten ist. Die Construction, welche wir früher (§ 2, 2) zur Bestimmung der Strömungskurven anwandten, können wir daher auch hier beibehalten, wir haben aber die behandelte Kugelschicht im Sinne der Rotation um einen gewissen Winkel $\frac{\delta}{i}$ gegen die früher festgesetzte Lage zu drehen. Dieser Winkel ist bei kleinen Drehungsgeschwindigkeiten diesen proportional, bei grösseren convergirt er gegen die Grösse $\frac{\pi}{2i}$. Die Intensität, welche anfangs den Rotationsgeschwindigkeiten proportional wächst, wächst bei steigenden Werthen derselben immer langsamer und convergirt gegen eine feste Grenze.

Construction der Stromlinien.

2. Wird schliesslich $\frac{\omega}{k} = \infty$, so wird $\delta = \frac{\pi}{2}$, also

$$\Omega_i = -\chi_n$$

Die Geschwindigkeit ist unendlich.

$$\Omega_a = \frac{n}{n+1}\chi_n$$

$$\psi = \frac{2n+1}{4\pi(n+1)}\bar{\chi}_n.$$

Dieser Schluss gilt nicht für diejenigen Glieder der Entwickelung, welche symmetrisch zur Rotationsaxe sind. Für diese ist i, also h, also Ω gleich Null für jede Drehungsgeschwindigkeit. Diese Glieder rufen keine Strömung, sondern nur eine Vertheilung freier Elektricität in der Kugel hervor.

Eine unendlich schnell rotirende Hohlkugel lässt also nur diejenigen Theile des äusseren Potentiales in ihrem Innern wirken, welche symmetrisch zur Axe sind, sind solche Glieder nicht vorhanden, so ist das Innere der Kugel gegen den Einfluss von Aussen geschützt. Ist das Potential eine Kugelfunktion, so findet die Strömung in den Linien gleichen Potentiales statt.

3. Für das elektrische Potential, welches χ_n entspricht, hatten wir gefunden ohne Berücksichtigung der Selbstinduction:

$$\bar{\varphi} = -\frac{\omega}{n+1} R \sin\theta \frac{\partial \bar{\chi}_n}{\partial \theta}.$$

Mit Berücksichtigung der Selbstinduction werden wir haben:

Das elektrische Potential.

$$\bar{\varphi} = -\frac{w}{n+1} R \sin\theta \frac{\partial \overline{\chi_n + \Omega_i}}{\partial \theta}.$$

Daraus folgt: Die Gestalt der Niveaulinien des Potentials bleibt (für jede inducirende Kugelfunktion) ungeändert durch die Selbstinduction, die Niveaulinien erscheinen um denselben Winkel gedreht, wie die Strömungslinien. Für die Theile des äussern Potentials, welche symmetrisch zur Achse sind, wächst φ ins Unendliche bei wachsender Geschwindigkeit, für die übrigen convergirt es gegen einen endlichen Grenzwerth, welcher sich leicht bestimmen lässt.

Ausartungen der Kugelschaale.

Ebene Platten.

Wir lassen jetzt den Radius der Kugelschaale unendlich werden, die Variationen des inducirenden Potentials aber endlich bleiben, wir untersuchen sodann näher die elektrische Bewegung am Aequator und am Pol. Wir erhalten so die Theorie geradlinig bewegter und rotirender ebener Platten. Erstere kann als ein specieller Fall letzterer angesehen werden, es empfiehlt

sich aber in mancher Hinsicht, diese Fälle gesondert zu behandeln.

A. Geradlinig bewegte Platten.

Wir führen das Coordinatensystem der $\xi\ \eta\ \zeta$ ein, dessen Zusammenhang mit den x, y, z durch Tafel 1b. gegeben ist.

Geradlinig bewegte Platten.

Die Richtung der η ist die positive Bewegungsrichtung. Die wirkenden Magnete denken wir uns in der Kugel, also auf der Seite der negativen ζ. Wir haben zu untersuchen, welche Form in den $\xi\ \eta\ \zeta$ die Kugelfunktion

$$A_{ni}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} \cos i\omega\ P_{ni}$$

annimmt.

Um endliche Variationen zu erhalten, haben wir n und i ∞ werden zu lassen von der Ordnung von R, wir setzen

$$\begin{array}{ll} \text{für } n & nR \\ \text{für } i & rR. \end{array}$$

Wir ersetzen ferner

$$\varrho,\ \omega,\ \theta$$

durch

$$R+\zeta,\ \frac{\eta}{R},\ \frac{\pi}{2}+\frac{\xi}{R}.$$

Dadurch geht über:

$$\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} \text{ in } e^{-n\zeta}$$

$$\cos i\omega \text{ in } \cos r\eta.$$

$P_{ni}(\theta)$ muss in eine solche Funktion von ξ übergehen, dass das Produkt derselben mit $e^{-n\zeta}\cos r\eta$ der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ genügt. Eine solche Funktion ist $\cos s\xi$ oder $\sin s\xi$, wenn

$$n^2 = r^2 + s^2$$

ist.

Sonach nehmen die früheren Kugelfunktionen jetzt die Form an

$$A_{rs}\, e^{-n\zeta} \cos r\eta \cos s\xi,$$

und verwandte.

Als Summe solcher Formen ist die äussere Potentialfunktion χ darzustellen. Diese Darstellung hat durch Fourier'sche Integrale zu erfolgen.

Für jedes Glied (Element) der Entwickelung geht nun die Lösung unmittelbar aus dem früheren hervor. Für das angeführte setzen wir

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2\pi r}{n}\cdot\frac{\alpha}{k},$$

worin α die Geschwindigkeit der Platte bezeichnet, und haben:

$$\Omega_+ = A_{rs}\, e^{-n\zeta} \sin\delta \sin(r\eta - \delta) \cos s\xi$$

$$\Omega_- = -A_{rs}\, e^{n\zeta} \sin\delta \sin(r\eta - \delta) \cos s\xi$$

Die Lösung.

$$\psi = \frac{1}{2\pi} A_{rs} \sin\delta \sin(r\eta - \delta) \cos s\xi.$$

Durch Summation über alle Glieder folgen die vollständigen Integrale des Problems. Die Summation lässt sich ausführen für den Fall, dass $\frac{\alpha}{k}$ unendlich wird. Dann ist

$$\delta = \frac{\pi}{2},\ \sin\delta = 1,$$

also

$$\Omega_+ = -\chi$$

$$\psi = -\frac{1}{2\pi}\chi.$$

Auf der den Magneten abgewandten Seite ist dann das Potential Null, die Strömung erfolgt überall in den Niveaulinien des inducirenden Potentiales.

Abgesehen von diesem Grenzfall ist indessen die Anwendung der obigen Lösung eine sehr weitläufige; wir sehen uns deshalb nach Näherungsmethoden um. Zu solchen gelangen wir zunächst wieder durch Einführung der successiven Inductionen. Damit die Betrachtung derselben erlaubt sei, muss $\frac{2\pi\alpha}{k}$ ein ächter Bruch sein, ist diese Bedingung erfüllt, so führt die Rechnung, wie schon im allgemeinen Falle gezeigt ist, zu einem convergenten Resultat.

Wir gehen wieder von der unendlichen Hohlkugel aus. Zu der inducirenden Potentialfunction χ_{-n-1} gehörte im äussern Raum die inducirte Potentialfunktion:

$$\Omega_a = -\frac{4\pi R}{2n+1}\,\frac{\omega}{k}\,\frac{\partial \chi_{-n-1}}{\partial \omega}.$$

Lassen wir nun R unendlich werden, während wir ersetzen

$\frac{\partial}{\partial \omega}$ durch $R\frac{\partial}{\partial \eta}$

n durch nR

ωR durch α

χ_{-n-1} durch $\chi_n = A_n\, e^{-n\zeta}\cos r\eta\,\cos s\xi$

so wird

$$\Omega_+ = -\frac{2\pi\alpha}{k}\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial \chi_n}{\partial \eta}$$

Aber es ist:

$$\int_\zeta^\infty \chi_n\, d\zeta = \frac{\chi_n}{n}.$$

Also ist, nach Summation über alle n

$$\Omega_+ = -\frac{2\pi\alpha}{k}\int_\zeta^\infty \frac{\partial \chi}{\partial \eta}\, d\zeta.$$

Aus diesem Ω können wir nun in ganz derselben Weise das inducirte Potential zweiter Ordnung erhalten, und indem wir in derselben Weise fortrechnen, erhalten wir schliesslich das Resultat:

Zweite Form der Lösung.

$$\Omega_+ = -\frac{2\pi\alpha}{k}\int_\zeta^\infty \frac{\partial \chi}{\partial \eta}\, d\zeta + \left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^2 \int_\zeta^\infty\int_\zeta^\infty \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta}\, d\zeta^2 - \ldots$$

$$\Omega_-(-\zeta) = -\Omega_+(\zeta)$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\,\overline{\Omega}_+.$$

Diese Reihe führt, hinreichend fortgesetzt, zu dem exacten Resultat; in der That ist sie nur die Entwickelung desselben

nach steigenden Potenzen von $\frac{2\pi\alpha}{k}$, wie sich in folgender Weise zeigt:

In der Kugelschaale lässt sich das zu $\chi_{(-n-1)i}$ gehörige Ω_a in der Form darstellen: (Seite 19 unten.)

$$\Omega_a = -\frac{1}{1+h^2}\left(\frac{h}{i}\,\frac{\partial \chi}{\partial \omega} + h^2\,\chi\right)$$

$$h = \frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)\,k}.$$

Machen wir nun wieder die auf die ebene Platte bezüglichen Substitutionen, entwickeln

$$\frac{1}{1+h^2} = 1 - h^2 + h^4 - h^6 + \ldots,$$

und setzen für h seinen Werth

$$\frac{2\pi\alpha}{k}\cdot\frac{r}{n},$$

so folgt

$$\Omega_+ = -\frac{2\pi\alpha}{k}\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial \chi_{rs}}{\partial \eta} - \left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^2 \frac{r^2}{n^2}\,\chi_{rs} + \left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^3 \frac{r^2}{n^3}\,\frac{\partial \chi_{rs}}{\partial \eta} + \left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^4 \frac{r^4}{n^4}\,\chi_{rs} - \ldots,$$

aus welcher Entwickelung die vorige folgt, wenn man die Relationen

$$\int_\zeta^\infty \chi_{rs}\, d\zeta = \frac{\chi_{rs}}{n},\quad \frac{\partial^2 \chi_{rs}}{\partial \eta^2} = -r^2\,\chi_{rs}$$

anwendet, und die Summation über alle r und s ausführt. Hieran knüpft sich naturgemäss der Versuch, für sehr grosse Werthe von $\frac{2\pi\alpha}{k}$ eine Entwickelung nach absteigenden Potenzen dieser Grösse zu erhalten.

Ist $h > 1$, so haben wir

$$\frac{1}{1+h^2} = \frac{1}{h^2}\left(1 - \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^4} - \ldots\right),$$

also:

$$\Omega_+ = -\chi_{rs} - \frac{k}{2\pi\alpha}\frac{n}{r^2}\frac{\partial\chi_{rs}}{\partial\eta} + \left(\frac{k}{2\pi\alpha}\right)^2\frac{n^2}{r^2}\chi_{rs} + \left(\frac{k}{2\pi\alpha}\right)^3\frac{n^3}{r^4}\frac{\partial\chi_{rs}}{\partial\eta} - \ldots$$

Die Glieder dieser Reihe lassen nun allerdings, wie der Versuch zeigt, eine Darstellung, welche unmittelbar die Summation über alle χ_{rs} erlaubt, nicht zu; setzen wir aber voraus, das χ symmetrisch zur η Achse sei, so dass in seiner Entwickelung nur Glieder mit $\cos r\eta$ vorkommen, so haben wir

$$-n\chi_{rs} = \frac{\partial\chi_{rs}}{\partial\zeta}$$

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\chi}{\partial\eta} = \int_0^\eta \chi_{rs}\,d\eta,$$

und können dann wenigstens für die Glieder erster Ordnung in $\frac{k}{2\pi\alpha}$ die Summation ausführen. Indem wir uns auf diese beschränken, erhalten wir:

Annähernde Lösung für grosse Werthe der Geschwindigkeit.

$$\Omega_+ = -\chi - \frac{k}{2\pi\alpha}\int_0^\eta \frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\,d\eta,$$

und für das sehr klein werdende Gesammtpotential auf der positiven Seite:

$$\Omega + \chi = -\frac{k}{2\pi\alpha}\int_0^\eta \frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\,d\eta.$$

Ausser der schon angeführten Bedingung müssen wir dieser Formel jedoch eine weitere Beschränkung auferlegen.

Ist nämlich $\frac{2\pi\alpha}{k}$ auch noch so gross, so wird doch für gewisse Elemente, für welche r verschwindet $h < 1$, also die benutzte Entwickelung ungültig werden. Dieser Umstand hat zur Folge, dass der aufgestellte Ausdruck nur in einem begrenzten Gebiet gilt, welches übrigens um so weiter ist, je

grösser $\frac{2\pi\alpha}{k}$ wird. Ich verweise deshalb auf die gleich folgende Betrachtung (Seite 29).

Wir bestimmen noch das Potential φ der freien Elektricität. Dasselbe ergiebt sich aus dem für die Hohlkugel gewonnenen Resultat durch ganz dieselben Substitutionen, welche wir beständig angewandt haben und wird erhalten:

Potential der freien Elektricität.

1. ohne Berücksichtigung der Selbstinduction:

$$\overline{\varphi} = \alpha\int_0^\infty \frac{\partial\chi}{\partial\xi}\,d\zeta$$

2. mit Berücksichtigung derselben:

$$\overline{\varphi} = \alpha\int_0^\infty \frac{\partial(\chi+\Omega)}{\partial\xi}\,d\zeta.$$

Von Interesse ist der Fall, dass die Geschwindigkeit α unendlich wird. Nehmen wir an, dass χ symmetrisch zur η Achse ist, und beschränken uns auf ein endliches Gebiet, so haben wir für $\alpha = \infty$,

$$\Omega + \chi = -\frac{k}{2\pi\alpha}\int_0^\eta \frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\,d\eta,$$

also wird

$$\overline{\varphi} = -\frac{k}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^\eta \frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\,d\eta\,d\zeta$$

$$= \frac{k}{2\pi}\int_0^\eta \frac{\partial\overline{\chi}}{\partial\xi}\,d\eta$$

φ nähert sich also bei wachsender Geschwindigkeit einem festen endlichen Grenzwerthe.

B. Rotirende Scheibe.

Es werde jetzt die Nachbarschaft des Poles betrachtet, wir erhalten so die Theorie einer unendlichen rotirenden Scheibe. Die inducirenden Magnete mögen wieder im Innern der Kugel

Rotirende Scheiben.

gedacht sein. Die Schlüsse, welche wir anzuwenden haben, sind den im vorigen Falle gemachten ganz analog.

Als Coordinaten benutzen wir ϱ, ω, z; ϱ soll hier den senkrechten Abstand von der Rotationsaxe bezeichnen. In den allgemeinen Formeln haben wir dann zu ersetzen:

$$\varrho \text{ durch } R + z$$

$$\theta \text{ durch } \frac{\varrho}{R}$$

$$\omega \text{ bleibt } \omega,$$

nach Einführung dieser Substitutionen haben wir R unendlich werden zu lassen. Es geht dann eine einfache Kugelfunktion über in die Form:

$$A_{ni}\, e^{-nz} \cos i\omega\, J^i(n\varrho),$$

(und in analoge), in welcher J^i die $i$te Bessel'sche Funktion bezeichnet. Durch Integrale, welche den Fourier'schen ganz analog sind, ist das gegebene χ in Glieder dieser Form zu zerspalten.

Wir behandeln jedes Glied einzeln.

Setzen wir:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2\pi\omega}{k} \cdot \frac{i}{n},$$

so ist für das angeführte Glied die Lösung des Problems:

Die Lösung.

$$\Omega_+ = A_{ni}\, e^{-nz} \sin\delta \sin(i\omega - \delta)\, J^i(n\varrho)$$

$$\Omega_- = -A_{ni}\, e^{nz} \sin\delta \sin(i\omega - \delta)\, J^i(n\varrho)$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi} A_{ni} \sin\delta \sin(i\omega - \delta)\, J^i(n\varrho).$$

Durch Summation ergeben sich die vollständigen Integrale.

Wir suchen wieder eine Entwickelung nach Potenzen von $\frac{2\pi\omega}{k}$ zu erhalten, durch Berücksichtigung der successiven Inductionen. Durch genau dieselben Schlüsse wie oben erhalten wir:

$$\Omega_+ = -\frac{2\pi\omega}{k} \int_z^\infty \frac{\partial\chi}{\partial\omega}\, dz + \left(\frac{2\pi\omega}{k}\right)^2 \int_z^\infty \int_z^\infty \frac{\partial^2\chi}{\partial\omega^2}\, dz^2 - \cdots$$

Zweite Form der Lösung.

$$\Omega_-(-z) = -\Omega_+(z)$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \overline{\Omega}_+.$$

Die Gültigkeit dieser Formeln ist aber an eine Beschränkung geknüpft, welche den früheren analogen aufzuerlegen wir nicht nöthig hatten. Ihre Ableitung setzt nämlich voraus, dass für jedes einzelne Glied der Entwickelung von χ die Anschauung der Gesammtinduction als einer Reihe successiver Inductionen erlaubt sei. Nach den Resultaten, die wir für Kugeln erhalten haben, ist diese Bedingung nur für diejenigen Glieder erfüllt, für welche $\frac{2\pi\omega}{k} \frac{i}{n}$ ein ächter Bruch ist. Nun kann aber n jeden Werth von Null bis ∞ annehmen, für eine Reihe von Gliedern ist daher die nothwendige Bedingung nicht erfüllt, das Resultat kann also nur ein angenähertes sein. In Bezug hierauf bemerke ich folgendes:

Bemerkungen zu letzterer.

1. Im Endlichen verschwinden die Glieder, für welche n einen sehr kleinen Werth hat, gegen diejenigen, für welche n einen endlichen Werth hat. Der in obiger Formel begangene Fehler muss daher zunächst für grosse ϱ einen merklichen Werth erhalten.

2. Die Grösse $\frac{2\pi\omega}{k}$ kann immer so klein gedacht werden, dass innerhalb eines gegebenen Gebietes die Annäherung eine gegebene sei. Denn eine Verkleinerung von $\frac{2\pi\omega}{k}$ vermindert die Anzahl der Glieder, welcher der erforderlichen Bedingung nicht genügen, eine beliebige Verkleinerung vermindert die Anzahl derselben in beliebigem Grade.

Die genaue Bestimmung des Gültigkeitsgebietes bei einem gegebenen $\frac{2\pi\omega}{k}$ und gegebener Annäherung dürfte Schwierigkeiten haben, für die Anwendungen ist diese Bestimmung ohne Wichtigkeit, da es sich hier erstens immer um sehr kleine

Werthe von $\frac{2\pi\omega}{k}$, zweitens nicht um unendliche, sondern um begrenzte Platten handelt.

Die Gleichung

$$\Omega = -\frac{2\pi\omega}{k}\int_z^\infty \frac{\partial\chi}{\partial\omega}\,dz$$

Möglichkeit, die Selbstinduction zu vernachlässigen.

ist exact, wenn man von der Selbstinduction absieht. Es zeigt sich also, dass die Erlaubniss, von der Selbstinduction absehen zu dürfen, nicht nur an die Bedingung, dass $\frac{2\pi\omega}{k}$ klein sei, sondern auch an die Beschränkung auf ein gewisses endliches Gebiet geknüpft ist. Die Grösse dieses Gebietes hängt von $\frac{2\pi\omega}{k}$ ab, über dasselbe hinaus aber ist ohne Berücksichtigung der Selbstinduction auch keine angenäherte Bestimmung der Strömung mehr möglich. Ein ganz analoges Resultat wird uns am Ende des § 4 begegnen.

Auch eine Entwickelung für grosse Werthe von $\frac{2\pi\omega}{k}$ lässt sich aufstellen. Wir bezeichnen mit χ_0 den Theil von χ, welcher symmetrisch zur Rotationsaxe ist, mit $\chi_1 = \chi - \chi_0$ den Rest. Dem χ_0 entspricht für jede Drehungsgeschwindigkeit der Werth $\Omega = 0$. Wir erhalten daher, wenn wir χ als symmetrisch zur x Achse annehmen, für grosse Werthe von $\frac{2\pi\omega}{k}$

Annäherung für grosse Werthe der Geschwindigkeit.

$$\Omega = -\chi_1 - \frac{k}{2\pi\omega}\int_0^\omega \frac{\partial\chi_1}{\partial z}\,d\omega.$$

Die Ableitung ist dieselbe wie oben. Die Reihe lässt sich hier auch vollständig und auch für solche χ ausführen, welche nicht symmetrisch zur x Achse sind; ich gehe darauf nicht weiter ein.

Zum Schluss bestimmen wir das Potential φ der freien Elektricität. Durch die passenden Substitutionen ergiebt sich aus den allgemeinen Formeln:

1. ohne Berücksichtigung der Selbstinduction:

$$\varphi = \omega\varrho\int_0^\infty \frac{\partial\chi}{\partial\varrho}\,dz.$$

Potential der freien Elektricität.

Diesem φ ist eventuell eine Constante von der Grösse hinzuzufügen, dass in der Unendlichkeit $\varphi = 0$ wird. Die Formel, zu welcher wir gelangt sind, ist schon von Herrn Jochmann angegeben für den Fall, dass χ symmetrisch zur z Achse ist, es zeigt sich, dass dieselbe ganz allgemein gilt.

2. mit Berücksichtigung der Selbstinduction haben wir:

$$\overline{\varphi} = \omega\varrho\int_0^\infty \frac{\partial(\chi+\Omega)}{\partial\varrho}\,dz\,.$$

Für ∞ werdende ω erhalten wir, wenn χ symmetrisch zur x Achse ist:

$$\varphi = \omega\varrho\int_0^\infty \frac{\partial\chi_0}{\partial\varrho}\,dz + \frac{k}{2\pi}\int_0^\omega \frac{\partial\chi_1}{\partial\varrho}\,d\omega.$$

Das erste Glied wächst mit ω ins Unendliche.

Wir haben bei der Behandlung ebener Platten immer angenommen, dass nur auf einer Seite der bewegten Platte sich inducirende Magnete befinden; diese Voraussetzung ist unwesentlich. Ist sie nicht erfüllt, so zerlegen wir das gesammte Potential nach seinem Ursprung in zwei Theile, und behandeln jeden so, wie dies oben an einem von ihnen gezeigt ist.

§ 4.

Vollständige Lösung für Kugeln und Hohlkugeln von endlicher Dicke.

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung der Induction in einer Hohlkugel von endlicher Dicke. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, mögen zunächst nur im äussern Raum inducirende Magnete vorausgesetzt werden.

Es seien U, V, W die Componenten eines Vectorpotentiales, welches von geschlossenen Strömen herrührt, die ganz oder theilweise im Innern der Kugel liegen. Wir suchen die von U, V, W inducirten Ströme u', v', w'. Für dieselben bestehen die Gleichungen:

Die Differentialgleichungen.

$$\varkappa u' = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \omega x\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$\varkappa v' = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \omega y\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$\varkappa w' = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \omega x\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) - \omega y\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)$$

ferner im Innern:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

und an der Oberfläche:

$$ux + vy + wz = 0.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$O = x\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) + y\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) + z\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

Unter Beachtung des Umstandes, dass

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

ist, erhalten wir nun für φ die Bedingungen:

In der Masse der Hohlkugel:

$$\Delta\varphi = 2\omega\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) + \omega\,(x\Delta V - y\Delta U),$$

und an der Grenze

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{\omega}{\varrho}\left\{\varrho^2\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) - zO\right\}.$$

Satz, welcher die Grundlage des Folgenden bildet.

Wir beweisen zunächst den folgenden Satz:

Haben $U\,V\,W$ die Form:

$$U = \varrho^m\left(y\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z\frac{\partial \chi_n}{\partial y}\right)$$

$$V = \varrho^m\left(z\frac{\partial \chi_n}{\partial x} - x\frac{\partial \chi_n}{\partial z}\right)$$

$$W = \varrho^m\left(x\frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y\frac{\partial \chi_n}{\partial x}\right),$$

welche Form der Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

genügt, so sind die Lösungen der vorstehenden Differentialgleichungen:

$$\varphi = -\omega\varrho^m\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right)$$

$$= \omega\varrho^{m+1}\sin\theta\frac{\partial \chi_n}{\partial \theta}$$

$$u' = -\frac{\omega}{\varkappa}\varrho^m\left(y\frac{\partial \chi_n'}{\partial z} - z\frac{\partial \chi_n'}{\partial y}\right)$$

$$v' = -\frac{\omega}{\varkappa}\varrho^m\left(z\frac{\partial \chi_n'}{\partial x} - x\frac{\partial \chi_n'}{\partial z}\right)$$

$$w' = -\frac{\omega}{\varkappa}\varrho^m\left(x\frac{\partial \chi_n'}{\partial y} - y\frac{\partial \chi_n'}{\partial x}\right).$$

Um den Beweis der Richtigkeit zu führen, drücken wir zunächst die Bedingungen für φ in χ_n aus. Es ist (§ 1,4)

$$\Delta U = m\,(m + 2n + 1)\,\varrho^{m-2}\left(y\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z\frac{\partial \chi_n}{\partial y}\right)$$

$$\Delta V = m\,(m + 2n + 1)\,\varrho^{m-2}\left(z\frac{\partial \chi_n}{\partial x} - x\frac{\partial \chi_n}{\partial z}\right)$$

$$\Delta W = m\,(m + 2n + 1)\,\varrho^{m-2}\left(x\frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y\frac{\partial \chi_n}{\partial x}\right)$$

Beweis desselben.

$$y\Delta U - x\Delta V = m\,(m + 2n + 1)\,\varrho^{m-2}\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right)$$

$$z\Delta V - y\Delta W = m\,(m + 2n + 1)\,\varrho^{m-2}\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial x} - nx\chi_n\right)$$

$$x\Delta W - z\Delta U = m\,(m + 2n + 1)\,\varrho^{m-2}\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial y} - ny\chi_n\right)$$

ferner:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = -m\varrho^{m-2}\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right) - \varrho^m(n+1)\frac{\partial \chi_n}{\partial z}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = -m\varrho^{m-2}\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial x} - nx\chi_n\right) - \varrho^m(n+1)\frac{\partial \chi_n}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = -m\varrho^{m-2}\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial y} - ny\chi_n\right) - \varrho^m(n+1)\frac{\partial \chi_n}{\partial y}.$$

Daraus folgt:

$$O = -n(n+1)\varrho^m\chi_n.$$

Also werden die Bedingungen für φ:

$$\Delta\varphi = -\omega m(m+2n+3)\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right)\varrho^{m-2}$$

$$-2\omega(n+1)\varrho^m\frac{\partial \chi_n}{\partial z};$$

an der Grenze:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = -(m+n+1)\frac{\omega}{\varrho}\varrho^m\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right).$$

Diesen Bedingungen aber genügt φ, denn es ist erstens:

$$\Delta\varphi = -\omega\left[\Delta\left(\varrho^{m+2}\frac{\partial \chi_n}{\partial z}\right) - 2n\frac{\partial}{\partial z}(\varrho^m\chi^n) - nz\,\Delta(\varrho^m\chi^n)\right]$$

$$= -\omega\left\{\varrho^n\frac{\partial \chi_n}{\partial z}[(m+2)(m+2n+1) - 2n]\right.$$

$$\left. - nz\varrho^{m-2}\chi_n[m(m+2n+1) + 2m]\right\}$$

$$= -\omega\left\{m(m+2n+3)\varrho^{m-2}\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right)\right.$$

$$\left. + 2(n+1)\varrho^n\frac{\partial \chi_n}{\partial z}\right\},$$

wonach die erste Bedingung erfüllt ist;

zweitens ist φ das Produkt aus einer Funktion der Winkel und ϱ^{m+n+1}, also

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = \frac{m+n+1}{\varrho}\varphi,$$

wonach auch die zweite Bedingung erfüllt ist. Aus dem so als richtig nachgewiesenen φ folgen aber die $u'\ v'\ w'$ durch die ursprünglichen Differentialgleichungen, zunächst allerdings in einer etwas complicirteren Form. Ganz dieselbe Form ist aber schon Seite 11 aufgetreten, und es hat sich schon dort gezeigt, dass sie mit der hier gegebenen identisch ist.

An diesen Satz knüpfen sich die folgenden Bemerkungen. Folgerungen.

1. Wir können in demselben ϱ^m durch eine Reihe von Potenzen, deren jede mit einer willkürlichen Constanten multiplicirt ist, also durch eine willkürliche Funktion von ϱ ersetzen. Wir können zweitens χ_n durch eine Reihe von Kugelfunktionen verschiedenen Grades mit beliebigen Coeffizienten ersetzen, da die Ordnungszahl n im Endresultat keine Rolle spielt. Hieraus ergiebt sich folgende Verallgemeinerung des Satzes:

Ist χ eine ganz beliebige Funktion und

$$U = \frac{\partial\chi}{\partial\omega_x}$$

$$V = \frac{\partial\chi}{\partial\omega_y}$$

$$W = \frac{\partial\chi}{\partial\omega_z},$$

so sind die von U, V, W inducirten $u'\ v'\ w'$:

$$u' = -\frac{\omega}{\varkappa}\frac{\partial\chi'}{\partial\omega_x}$$

$$v' = -\frac{\omega}{\varkappa}\frac{\partial\chi'}{\partial\omega_y}$$

$$w' = -\frac{\omega}{\varkappa}\frac{\partial\chi'}{\partial\omega_z}.$$

Es ist nicht schwer, diesen Satz mit den in früheren Paragraphen erhaltenen Resultaten in Verbindung zu setzen.

2. Die durch obige Formen gegebenen $U\ V\ W$ rühren

von Strömungen her, die in concentrischen Kugelschaalen erfolgen. Denn es ist

$$x\Delta U + y\Delta V + z\Delta W = 0.$$

Umgekehrt lassen sich die U, V, W solcher Strömungen immer in obiger Form darstellen. Denn ist $\chi_n f(\varrho)$ das Glied in der Entwicklung der Strömungsfunktion, welches die $n$te Kugelfunktion enthält, so haben die zu diesem Gliede gehörigen U, V, W ohne Weiteres die obige Form.

Andererseits geschehen auch die inducirten Strömungen in concentrischen Kugelschaalen. Denn es ist

$$ux + vy + wz = 0.$$

Wir folgern daraus:

Die Strömung geschieht immer in concentrischen Kugelschaalen.

Eine Strömung, welche in concentrischen Kugelschaalen erfolgt, inducirt eine Strömung, welche dieselbe Eigenschaft hat. Und weiter: Die Strömungen, welche in einer rotirenden Hohlkugel durch ruhende Magnete inducirt werden, erfolgen immer in concentrischen Kugelschaalen um den Nullpunkt.

3. Es ist

$$\varphi = \omega\,(x\,V - y\,U),$$

sobald U, V, W die obige Form, also die inducirenden Ströme die besprochene Eigenthümlichkeit haben. Wir werden dies in § 8 benutzen müssen.

Berechnung der successiven Inductionen.

Es ist nun nicht mehr schwer, die successiven Inductionen zu berechnen, welche ein gegebenes äusseres Potential hervorruft. Sei χ_n das $n$te Glied in der Entwickelung desselben. Wir finden die Ströme erster Induction:

$$u_1 = \frac{1}{n+1}\,\frac{\omega}{\varkappa}\,\frac{\partial\chi'}{\partial\omega_x}$$

$$v_1 = \frac{1}{n+1}\,\frac{\omega}{\varkappa}\,\frac{\partial\chi'}{\partial\omega_y}$$

$$w_1 = \frac{1}{n+1}\,\frac{\omega}{\varkappa}\,\frac{\partial\chi'}{\partial\omega_z}.$$

Die zugehörigen U_1 V_1 W_1 sind:

$$U_1 = \frac{2\pi}{n+1}\,\frac{\omega}{\varkappa}\,\frac{\partial\chi'}{\partial\omega_x}\left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} - \frac{2r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)\varrho^{2n+1}}\right)$$

$$V_1 = \frac{2\pi}{n+1}\,\frac{\omega}{\varkappa}\,\frac{\partial\chi'}{\partial\omega_y}\left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} - \frac{2r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)\varrho^{2n+1}}\right)$$

$$W_1 = \frac{2\pi}{n+1}\,\frac{\omega}{\varkappa}\,\frac{\partial\chi'}{\partial\omega_z}\left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} - \frac{2r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)\varrho^{2n+1}}\right).$$

Man findet diese Werthe durch eine einfache Integration, indem man beachtet, dass u_1 v_1 w_1 Produkte von ϱ^n und Kugelflächenfunktionen sind. Das Potential jeder unendlich dünnen Kugelschicht im Innern und Aeussern derselben ist bekannt und eine Integration nach ϱ giebt die angeführten Werthe. Es folgen aus denselben die Strömungen zweiter Induction:

$$u_2 = -\frac{2\pi}{n+1}\left(\frac{\omega}{\varkappa}\right)^2\frac{\partial\chi''}{\partial\omega_x}\left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} - \frac{2r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)\varrho^{2n+1}}\right)$$

$$v_2 = -\frac{2\pi}{n+1}\left(\frac{\omega}{\varkappa}\right)^2\frac{\partial\chi''}{\partial\omega_y}\left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} - \frac{2r^{2n+3}}{(2n+1)\,2n+3)\varrho^{2n+1}}\right)$$

$$w_2 = -\frac{2\pi}{n+1}\left(\frac{\omega}{\varkappa}\right)^2\frac{\partial\chi''}{\partial\omega_z}\left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} - \frac{2r^{2n+3}}{(2n+1)\,2n+3)\varrho^{2n+1}}\right).$$

In derselben Weise kann die Rechnung beliebig fortgesetzt werden, die Resultate derselben werden jedoch immer complicirter und wir wenden uns daher zur exacten Lösung des Problems.

Wir sahen, dass die Strömungen immer senkrecht zum Radius sind, wir können also wieder von der Strömungsfunktion Gebrauch machen.

Sei $f(\varrho) = f$ eine beliebige Funktion von ϱ, sei

$$\psi = \varrho \cdot f \cdot \chi_n$$

die Strömungsfunktion eines in der Kugel bestehenden Stromsystems.

Die Stromdichten sind:

Allgemeine Lösung.

$$u = f\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_x}$$

$$v = f\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_y}$$

$$w = f\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_z}.$$

Sei nun $F(\varrho) = F$ eine zweite Funktion von ϱ, welche mit f durch die Gleichung verbunden ist:

$$F(\varrho) = \frac{4\pi}{2n+1}\frac{1}{\varrho^{2n+1}}\left\{\int_r^{\varrho} a^{2n+2} f(a)\,da + \int_{\varrho}^{R} \varrho^{2n+1} a f(a)\,da\right\}$$

aus welcher durch Differentiation folgt:

$$\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^{-2n}\frac{d}{d\varrho}(\varrho^{2n+1}F)\right) = -4\pi\varrho f(\varrho).$$

Es sind dann die zu u, v, w gehörigen U, V, W:

$$U = F\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_x}$$

$$V = F\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_y}$$

$$W = F\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_z}.$$

Daraus folgen die von dem System ψ inducirten Ströme:

$$u' = -\frac{\omega}{\varkappa} F\frac{\partial \chi'_n}{\partial \omega_x}$$

$$v' = -\frac{\omega}{\varkappa} F\frac{\partial \chi'_n}{\partial \omega_y}$$

$$w' = -\frac{\omega}{\varkappa} F\frac{\partial \chi'_n}{\partial \omega_z}.$$

Die zu diesem System gehörige Strömungsfunktion ist:

$$\psi' = -\frac{\omega}{\varkappa}\varrho F\chi'_n.$$

Es inducirt also die Funktion

$$\psi = \varrho \cdot f \cdot \chi_n$$

die andere

$$\psi' = -\frac{\omega}{\varkappa}\varrho F\chi'_n.$$

Es bedeute nun ψ die in der Kugel unter dem Einfluss der äussern Potentialfunktion χ_n thatsächlich bestehende Strömung, ψ_0 sei die von den äussern Magnetismen direct inducirte Strömung, dann ist offenbar die Bedingung des stationären Zustandes:

$$\psi = \psi_0 + \psi'.$$

Um diese Gleichung weiter zu entwickeln, zerlegen wir χ_n und betrachten jedes Glied für sich; sei das vorgelegte:

$$\chi_{ni} = A\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \cos i\omega\, P_{ni}.$$

Wir haben dann (Seite 13):

$$\psi_0 = -\frac{\omega}{\varkappa} A\varrho\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \frac{i}{n+1}\sin i\omega\, P_{ni}.$$

Setzt man nun

$$\psi = -\frac{\omega}{\varkappa} A\varrho\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \frac{i}{n+1}(f_1(\varrho)\sin i\omega + f_2(\varrho)\cos i\omega)\, P_{ni}$$

so wird

$$\psi' = \left(\frac{\omega}{\varkappa}\right)^2 A\varrho\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \frac{i^2}{n+1}(F_1\varrho\cos i\omega - F_2\varrho\sin i\omega)\, P_{ni}.$$

Die Gleichung $\psi = \psi_0 + \psi'$ ist nun erfüllt, wenn f_1 und f_2 den Gleichungen genügen:

$$f_1(\varrho) = 1 + \frac{i\omega}{\varkappa} F_2(\varrho)$$

$$f_2(\varrho) = -\frac{i\omega}{\varkappa} F_1(\varrho)$$

durch welche f_1 und f_2 vollständig bestimmt sind.

Denken wir uns f_1 und f_2 gefunden, so lässt sich das Resultat der Untersuchung in folgender Form aussprechen:

Die Selbstinduction lässt die Form der Strömungslinien (für jedes einzelne Glied der Entwickelung) ungeändert, ihre Wirkung besteht darin:

erstens, die Erscheinung um den $i$ten Theil eines gewissen Winkels δ im Sinne der Rotation zu drehen, eines Winkels, der für die verschiedenen Schichten von verschiedener Grösse ist, und für welchen die Gleichung $\operatorname{tg}\delta = \frac{f_2}{f_1}$ gilt,

zweitens, die Intensität der Strömung in den verschiedenen Schichten in verschiedener Weise abzuändern. Das Verhältniss der wirklich stattfindenden Intensität zu der ohne Berücksichtigung der Selbstinduction erhaltenen ist

$$= \sqrt{f_1^2 + f_2^2} : 1.$$

Mit der Bestimmung der Funktionen f_1 und f_2 werden wir uns einige Zeit zu beschäftigen haben.

Behandlung der Gleichungen für die f.

Wir führen die folgenden Abkürzungen ein: Es sei

$$\frac{4\pi i\omega}{\varkappa} = \mu^2$$

$$\mu r = s, \quad \mu R = S$$

$$f_1(\varrho) = \varphi_1(\mu\varrho) = \varphi_1\sigma$$

$$f_2(\varrho) = \varphi_2(\mu\varrho) = \varphi_2\sigma.$$

Wir denken uns in die Gleichungen, welche f_1 und f_2 bestimmen für F_1 und F_2 ihre Werthe gesetzt, wir transformiren sodann die Gleichungen auf φ und σ, und erhalten:

$$\varphi_1\sigma = 1 + \frac{1}{(2n+1)\,\sigma^{2n+1}}\left\{\int_s^\sigma a^{2n+2}\varphi_2\,a\,da + \int_\sigma^S \sigma^{2n+1}a\varphi_2\,a\,da\right\}$$

$$\varphi_2\sigma = -\frac{1}{(2n+1)\,\sigma^{2n+1}}\left\{\int_s^\sigma a^{2n+2}\varphi_1\,a\,da + \int_\sigma^S \sigma^{2n+1}a\varphi_1\,a\,da\right\}.$$

Durch Differentiation geben dieselben:

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma^{-2n}\,\frac{d}{d\sigma}\,(\sigma^{2n+1}\varphi_1)\right) = -\sigma\varphi_2$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma^{-2n}\,\frac{d}{d\sigma}\,(\sigma^{2n+1}\varphi_2)\right) = \sigma\varphi_1.$$

Die Form der Funktionen φ_1 und φ_2 hängt also nur ab von n, in den Integrationsconstanten kommen dann allerdings noch μ, s und S vor.

Obige Gleichungen können geschrieben werden:

$$\varphi_1'' + \frac{2n+2}{\sigma}\,\varphi_1' = -\varphi_2$$

$$\varphi_2'' + \frac{2n+2}{\sigma}\,\varphi_1' = \varphi_1.$$

Als Differentialgleichungen können dieselben vollständig ersetzt werden durch die folgenden:

$$\varphi_2 = \pm\,\varphi_1\sqrt{-1}$$

$$\varphi_1'' + \frac{2n+2}{\sigma}\,\varphi_1' \pm \varphi_1\sqrt{-1} = 0.$$

Denn alle Lösungen der letzteren befriedigen erstere, und die allgemeine Lösung der letzteren enthält 2×2 willkürliche Constanten, ist also auch die allgemeine Lösung der ersteren.

Setzen wir $\lambda^4 = -1$, und verstehen insbesondere unter λ diejenigen Wurzeln dieser Gleichung, deren reeller Theil positiv ist, also

$$\lambda_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(1 + \sqrt{-1})$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(1 - \sqrt{-1}),$$

so werden unsere Gleichungen:

$$\varphi_2 = -\lambda^2\varphi_1$$

$$\varphi_1'' + \frac{2n+2}{\sigma}\,\varphi_1' - \lambda^2\varphi_1 = 0.$$

Die beiden particulären Integrale derselben sind:

$$\int_{-1}^{+1}(1-v^2)^n\,e^{\sigma\lambda v}\,dv, \quad \int_1^\infty (1-v^2)^n\,e^{-\sigma\lambda v}\,dv,$$

gültig für reelle positive σ.

Dass diese Integrale die Gleichungen befriedigen, wird etwas weiter unten gezeigt werden. Da in unserm Falle n eine ganze Zahl ist, so lassen sich die Integrale ausführen und also das Resultat der Auflösung in endlicher geschlossener

Form aufstellen, der Einfachheit halber möge die Integralform beibehalten werden. Setzt man

Defination der p und q.

$$p_n \sigma = \int_{-1}^{+1} (1 - v^2)^n \, e^{\sigma v} \, dv$$

$$q_n \sigma = \int_{1}^{\infty} (1 - v^2)^n \, e^{-\sigma v} \, dv,$$

so sind offenbar die Lösungen der Differentialgleichungen:

$$\varphi_1 = A p_n(\lambda_1 \sigma) + B p_n(\lambda_2 \sigma) + C q_n(\lambda_1 \sigma) + D q_n(\lambda_2 \sigma)$$

$$-\varphi_2 = \lambda_1^2 A p_n(\lambda_1 \sigma) + \lambda_2^2 B p_n(\lambda_2 \sigma) + \lambda_1^2 C q_n(\lambda_1 \sigma) + \lambda_2^2 D q_n(\lambda_2 \sigma)$$

Diese Lösungen sind in die Integralgleichungen einzusetzen und daraus die Constanten zu bestimmen. Zur Ausmittlung der dabei auftretenden Integrale dienen die folgenden Rechnungen:

Man hat:

$$p_n(\lambda\sigma) = \int_{-1}^{+1} (1 - v^2)^n \, e^{\lambda \sigma v} \, dv,$$

$$\sigma^{-2n} \frac{d}{d\sigma} (\sigma^{2n+1} p_n) = \int_{-1}^{+1} (1 - v^2)^n \, (\sigma v \lambda + 2n + 1) \, e^{v\lambda\sigma} \, dv$$

$$= 2n \, p_{n-1}(\lambda\sigma) \; ^*)$$

$$\frac{d}{d\sigma} [\sigma^{-2n} \frac{d}{d\sigma} (\sigma^{2n+1} p_n)] = \lambda \int_{-1}^{+1} (1 - v^2)^n (v^2 \lambda\sigma + 2(n+1)v) e^{v\sigma\lambda} \, dv$$

$$= \lambda^2 \sigma \, p_n(\lambda\sigma) \; ^*).$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass p_n eine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung ist.

*) Die letzten Glieder der Gleichungen werden durch Umformung der voranstehenden Integrale, vorzüglich durch partielle Integration erhalten.

Durch rückwärtsschreitende Integration findet man nun aus den vorigen Formeln:

$$\int \sigma \, p_n(\lambda\sigma) \, d\sigma = \frac{2n}{\lambda^2} \, p_{n-1}(\lambda\sigma)$$

und

$$\int \sigma^{2n} \, p_{n-1}(\lambda\sigma) \, d\sigma = \frac{1}{2n} \, \sigma^{2n+1} \, p_n(\lambda\sigma),$$

aus welchen durch Differentiation die Recursionsformeln folgen:

Integral- und Recursionsformeln der p_n und q_n.

$$p_n(\lambda\sigma) = \frac{2n}{\lambda} \frac{p'_{n-1}}{\sigma}$$

$$p_{n-1}(\lambda\sigma) = \frac{2n+1}{2n} \, p_n(\lambda\sigma) + \frac{\lambda\sigma}{2n} \, p'_n(\lambda\sigma)$$

aus welchen folgt:

$$p_{n-1} = \frac{2n+1}{2n} \, p_n + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{4n(n+1)} \, p_{n+1}$$

$$p_n = \frac{2}{\lambda^2 \sigma^2} \left\{ 2n(n-1) \, p_{n-2} - n(2n-1) \, p_{n-1} \right\}.$$

Ganz ähnliche Rechnungen lassen sich nun auch für die q_n durchführen, die Resultate gehen aus den eben gewonnenen einfach durch Vertauschung von p mit q hervor, man hat also auch

$$\int \sigma \, q_n(\lambda\sigma) \, d\sigma = \frac{2n}{\lambda^2} \, q_{n-1}(\lambda\sigma)$$

$$\int \sigma^{2n} \, q_{n-1}(\lambda\sigma) \, d\sigma = \frac{1}{2n} \, \sigma^{2n+1} \, q_n(\lambda\sigma) \text{ etc.}$$

Mit Zuhülfenahme dieser Formeln hat die Ausführung der nothwendigen Integrationen keine Schwierigkeit, beispielsweise hat man, unter Zuhülfenahme einer partiellen Integration:

$$\int_s^\sigma a^{2i+2} p_n \, a \, da + \sigma^{2n+1} \int_\sigma^S a p_n(a) \, da$$

$$= \frac{2n}{\lambda^2} \sigma^{2n+1} p_{n-1}(S) - \frac{2n s^{2n+1} \, p_{n-1}(s)}{\lambda^2} + \frac{(2n+1) s^{2n+1} p_n(s)}{\lambda^2}$$

$$- \frac{2n+1}{\lambda^2} \sigma^{2n+1} p_n(\sigma)$$

$$= \frac{2n}{\lambda^2}\sigma^{2n+1}p_{n-1}(S) - \frac{s^{2n+3}}{2(n+1)}p_{n+1}(s) - \frac{2n+1}{\lambda^2}\sigma^{2n+1}p_n(\sigma).$$

Setzt man diese und die ähnlich zu bildenden Ausdrücke für q in die Gleichungen ein, beachtet, dass $\varphi_2 = -\varphi_1\lambda^2$, und $\lambda^4 = -1$, so heben sich die p und q, wie es sein muss, heraus und es bleiben Gleichungen zurück von der Form

$$0 = \text{const}_1 + \frac{\text{const}_2}{\varrho^{2n+1}},$$

welches die Lösungen der Gleichung

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma^{-2n}\frac{d}{d\sigma}(\sigma^{2n+1}\varphi)\right) = 0$$

sind.

Die hier auftretenden Constanten müssen einzeln verschwinden, und es werden so die folgenden 4 Gleichungen für $A\ B\ C\ D$ erhalten, unter Beachtung des Umstandes, dass

$$\frac{1}{\lambda_1^2} = -\frac{1}{\lambda_2^2}$$

ist:

$$\frac{2n+1}{2n} = Ap_{n-1}(\lambda_1 S) + Bp_{n-1}(\lambda_2 S) + Cq_{n-1}(\lambda_1 S) + Dq_{n-1}(\lambda_2 S)$$
$$0 = Ap_{n-1}(\lambda_1 S) - Bp_{n-1}(\lambda_2 S) + Cq_{n-1}(\lambda_1 S) - Dq_{n-1}(\lambda_2 S)$$
$$0 = Ap_{n+1}(\lambda_1 s) + Bp_{n+1}(\lambda_2 s) + Cq_{n+1}(\lambda_1 s) + Dq_{n+1}(\lambda_2 s)$$
$$0 = Ap_{n+1}(\lambda_1 s) - Bp_{n+1}(\lambda_2 s) + Cq_{n+1}(\lambda_1 s) - Dq_{n+1}(\lambda_2 s).$$

Dieselben lassen sich leicht auflösen und ergeben:

$$A = \frac{2n+1}{4n}\cdot\frac{q_{n+1}(\lambda_1 s)}{p_{n-1}(\lambda_1 S)\,q_{n+1}(\lambda_1 s) - p_{n+1}(\lambda_1 s)\,q_{n-1}(\lambda_1 S)}$$

$$C = -\frac{2n+1}{4n}\cdot\frac{p_{n+1}(\lambda_1 s)}{p_{n-1}(\lambda_1 S)\,q_{n+1}(\lambda_1 s) - p_{n+1}(\lambda_1 s)\,q_{n-1}(\lambda_1 S)}$$

$$B = \frac{2n+1}{4n}\cdot\frac{q_{n+1}(\lambda_2 s)}{p_{n-1}(\lambda_2 S)\,q_{n+1}(\lambda_2 s) - p_{n+1}(\lambda_2 s)\,q_{n-1}(\lambda_2 S)}$$

$$D = -\frac{2n+1}{4n}\cdot\frac{p_{n+1}(\lambda_2 s)}{p_{n-1}(\lambda_2 S)\,q_{n+1}(\lambda_2 s) - p_{n+1}(\lambda_2 s)\,q_{n-1}(\lambda_2 S)}$$

Indem man diese Ausdrücke in φ_1 und φ_2 einsetzt, erhält man die vollständige Lösung. Dieselbe lässt sich einfacher darstellen in folgender Weise: Da λ_1 und λ_2 conjugirt sind, so sind auch $p(\lambda_1\sigma)$ und $p(\lambda_2\sigma)$ conjugirt, ebenso sind, wie man leicht sieht, A und B conjugirt, und es ist daher

$$A\,p_n(\lambda_1\sigma) + B\,p_n(\lambda_2\sigma)$$

gleich dem doppelten Werthe des reellen Theiles jedes dieser Ausdrücke. Ebenso ist

$$A\,p_n(\lambda_1\varrho) - B\,p_n(\lambda_2\varrho),$$

welcher Ausdruck in φ_2 vorkommt, gleich dem Doppelten des imaginären Theiles des ersten Gliedes. Indem man dies beachtet, und die Werthe von A und C, erkennt man leicht die Richtigkeit der Gleichung:

Lösung der Gleichungen für f_1 und f_2 mittelst der p und q.

$$\frac{2n+1}{2n}\cdot\frac{p_n(\lambda_1\sigma)\,q_{n+1}(\lambda_1 s) - q_n(\lambda_1\sigma)\,p_{n+1}(\lambda_1 s)}{p_{n-1}(\lambda_1 S)\,q_{n+1}(\lambda_1 s) - q_{n-1}(\lambda_1 S)\,p_{n+1}(\lambda_1 s)} = \varphi_1 + \varphi_2\sqrt{-1} = f_1 + f_2\sqrt{-1}.$$

Besonders einfach wird die Gleichung, wenn $s = 0$ ist, es sich also um eine Vollkugel handelt. Dann ist $q_{n+1}(s)$ unendlich, unsere Gleichung wird also:

$$\frac{2n+1}{2n}\,\frac{p_n(\lambda_1\sigma)}{p_{n-1}(\lambda_1 S)} = \varphi_1 + \varphi_2\sqrt{-1}.$$

Die Grössen, auf deren Kenntniss es uns besonders ankommt, nämlich der Winkel $\delta = \text{arc tg}\frac{f_2}{f_1}$ und die Verstärkung der Stromstärke $\sqrt{f_1^2 + f_2^2}$, haben eine sehr einfache analytische Bedeutung, sie sind Amplitude und Modul der links stehenden complexen Grössen.

Die Rechnungen lassen sich weiter führen mit Zuhülfenahme der folgenden Bemerkungen:

Weitere Eigenschaften der p und q.

Die Integrale, durch welche p und q definirt sind, lassen sich für ganzzahlige n unbestimmt ausführen, und die p und q also in geschlossener Form erhalten. Wir können und wollen unter den p und q diese so ausgerechneten Funktionen ver-

stehen. Dann sind auch q mit negativem Argument zulässig, und es gilt die Gleichung

$$-p_n(\varrho) = q_n(\varrho) + q_n(-\varrho),$$

aus welcher folgt, dass

$$p_n(\varrho) = p_n(-\varrho).$$

Denn sei, unbestimmt ausgeführt

$$\int (1-v^2)^n e^{-\sigma v}\, dv = V(\sigma, v),$$

dann ist

$$q_n(\sigma) = V(\sigma,\infty) - V(\sigma,1)$$

$$p_n(\sigma) = \int_0^1 (1-v^2)^n e^{-\sigma v}\, dv + \int_0^1 (1-v^2)\, e^{\sigma v}\, dv$$

$$= V(-\sigma,1) - V(-\sigma,0)$$

$$+ V(\sigma,1) - V(\sigma,0).$$

Aber es ist für ganze

$$V(\sigma,\infty) = 0, \quad V(-\sigma,0) = -V(\sigma,0),$$

und so folgt die Behauptung.

Die einfachsten Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung sind also:

$$q_n(\sigma) \text{ und } q_n(-\sigma).$$

Folgendes sind die Werthe der ersten q, von welchen der erste direct, die übrigen durch Recursion bestimmt sind:

Die ersten q.

$$q_0 = \frac{e^{-\sigma}}{\sigma}$$

$$q_1 = -\frac{2e^{-\sigma}}{\sigma^2}\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)$$

$$q_2 = \frac{2.2!.e^{-\sigma}}{\sigma^3}\left(1+\frac{3}{\sigma}+\frac{3}{\sigma^2}\right)$$

$$q_3 = -\frac{2\,3!.e^{-\sigma}}{\sigma^4}\left(1+\frac{6}{\sigma}+\frac{15}{\sigma^2}+\frac{15}{\sigma^3}\right)$$

etc.,

woraus also folgt:

$$p_0 = \frac{e^{\sigma}-e^{-\sigma}}{\sigma}$$

$$p_1 = \frac{2}{\sigma^2}\left(e^{\sigma}+e^{-\sigma}-\frac{e^{\sigma}-e^{-\sigma}}{\sigma}\right) \text{ etc.}$$

Für grosse Werthe von σ nähern sich die p und q den Ausdrücken:

Die p und q für grosse und kleine Werthe des Argumente.

$$q_n = (-2)^n n! \cdot \frac{e^{-\sigma}}{\sigma^{n+1}}$$

$$p_n(\sigma) = -q_n(-\sigma).$$

Für sehr kleine Werthe von σ wird:

$$q_n(\sigma) = \frac{(-2)^n n!\, 1.3\ldots 2n-1}{\sigma^{2n+1}}\, e^{-\sigma}.$$

Die Gleichung $-p(\sigma) = q(\sigma) + q(-\sigma)$ verliert hier ihre Bedeutung, da für $\sigma = 0$, $q = \pm\infty$ wird. Um auch für sehr kleine σ p zu kennen, entwickeln wir es in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von σ. Es geschieht das leicht, indem man in dem Integral, welches p darstellt, für $e^{+\sigma}$ seine Reihe setzt und gliedweise integrirt, man erhält:

$$p_n(\sigma) = \frac{2^{n+1} n!}{1.3\ldots 2n-1}\left\{1+\frac{\sigma^2}{2.2n+3}+\frac{\sigma^4}{2.4.2n+3.2n+5}+\ldots\right\}.$$

Von Wichtigkeit für später ist uns noch die folgende Formel: Es ist:

$$q_n(\sigma)\, q_{n-1}(-\sigma) - q_n(-\sigma)\, q_{n-1}(\sigma)$$

a) $$= -\frac{4n(n-1)}{\sigma^2}\left\{q_{n-1}(\sigma)\, q_{n-2}(-\sigma) - q_{n-1}(-\sigma) q_{n-2}(\sigma)\right\}$$

$$= \frac{n!(n-1)!}{\sigma}\left(-\frac{4}{\sigma^2}\right)^n,$$

welche Formel sich durch die für q gefundene Recursionsformel leicht beweisen lässt.

In allen besprochenen Eigenschaften der p_n und q_n zeigt sich eine nahe Verwandtschaft derselben zu den Bessel'schen Funktionen, in der That lassen sich die J^m durch die $p_{m+\frac{1}{2}}$ und $q_{m+\frac{1}{2}}$ ausdrücken.

Aus der Formel, welche unser Resultat bildete, können wir nun die Funktion p fortschaffen, und erhalten:

Definitive Form der Lösung.

$$\frac{2n+1}{n} \cdot \frac{q_{n+1}(\lambda s)\, q_n(-\lambda\sigma) - q_{n+1}(-\lambda s)\, q_n(\lambda\sigma)}{q_{n+1}(\lambda s)\, q_{n-1}(-\lambda S) - q_{n+1}(-\lambda s)\, q_{n-1}(\lambda S)} \text{ *)}$$
$$= \varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1}.$$

Anwendungen derselben.

Wir wenden diese Formel, welche die exacte Lösung giebt, auf specielle Fälle an, welche Vereinfachungen zulassen.

Dünne Kugelschaalen.

1. Es sei zunächst die Hohlkugel sehr dünn, sei d ihre Dicke. Es ist dann S sehr wenig verschieden von s, sei

$$S = s + \delta, \text{ wo nun } \delta = \mu d \text{ ist.}$$

Für σ können wir einen beliebigen Werth zwischen s und S setzen, sei $\sigma = S$.

Setzt man diesen Werth in obige Formel ein, wendet im Nenner die Substitution

$$q_{n-1} = \frac{2n+1}{2n}\, q_n + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{4n(n+1)}\, q_{n+1}$$

an, und dividirt durch den Zähler, so erhält man

$$\varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1}$$
$$= \frac{1}{1 + \frac{\lambda^2 \mu^2}{2(n+1)(2n+1)} \cdot \frac{q_{n+1}(\lambda s) q_{n+1}(-\lambda S) - q_{n+1}(-\lambda s) q_{n+1}(\lambda S)}{q_{n+1}(\lambda s) q_n(-\lambda S) - q_{n+1}(-\lambda s) q_n \lambda S.}}$$

Setzt man nun entwickelnd:

$$q_{n+1}(\lambda S) = q_{n+1}\{\lambda(s+\delta)\}$$
$$= q_{n+1}(\lambda s) + \lambda\delta\, q'_{n+1}(\lambda s)$$
$$= q_{n+1}(\lambda s) + \frac{\delta \lambda^2 s}{2(n+2)}\, q_{n+2}(\lambda s),$$

$$q_{n+1}(-\lambda S) = q_{n+1}(-\lambda s) - \frac{\delta \lambda^2 s}{2(n+2)}\, q_{n+2}(-\lambda s)$$

*) Es werde fortan für λ, einfach λ geschrieben, und ist also $\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{-1})$.

so kann man unter Zuhülfenahme von Formel a) (Seite 47) die q durch Division wegheben und erhält

$$\varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1} = \frac{1}{1 + \frac{s\delta\lambda^2}{2n+1}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{s\delta}{2n+1} = \frac{4\pi R i \omega}{(2n+1)k} = h,$$

nach unserer früheren Bezeichnungsweise, also wird

$$\varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1} = \frac{1}{1 + h\sqrt{-1}}$$
$$= \frac{1}{1+h^2} - \frac{h}{1+h^2}\sqrt{-1},$$

welches Resultat mit dem früher erhaltenen zusammenfällt.

Wir haben sonach einerseits unsere Formel an einem schon bekannten Resultat geprüft, andererseits den Beweis geführt, dass die früher gegebenen Formeln für alle h gelten, welcher Beweis noch ausstand.

2. Wir wenden zweitens unsere Formel auf den Fall an, dass wir in den f_1 und f_2 nur die erste Potenz der Drehungsgeschwindigkeit beizubehalten brauchen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf eine Vollkugel. Für eine solche hatten wir

Kleine Rotationsgeschwindigkeiten.

$$f_1 + f_2\sqrt{-1} = \frac{2n+1}{2n}\, \frac{p_n(\lambda\sigma)}{p_{n-1}(\lambda S)}.$$

Entwickeln wir die p und behalten nur die ersten Potenzen bei, so folgt

$$f_1 + f_2\sqrt{-1} = \frac{2 + \frac{\sigma^2}{2n+3}\sqrt{-1}}{2 + \frac{S^2}{2n+1}\sqrt{-1}}.$$

Eine nähere Betrachtung dieser Formel zeigt, dass die aus derselben für f_1 und f_2 folgenden Werthe, in ψ eingesetzt, nichts anderes ergeben, als die Inductionen erster und zweiter

Ordnung, welche wir schon auf Seite 37 berechnet haben. Wir betrachten hier nur den Drehungswinkel. Mit ausschliesslicher Berücksichtigung der ersten Potenzen hat man:

$$\text{arc tg}\,\frac{f_2}{f_1} = \delta = -\frac{2\pi\omega i}{\varkappa}\left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3}\right),$$

also den Drehungswinkel

$$\frac{\delta}{i} = -\frac{2\pi\omega}{\varkappa}\left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3}\right).$$

Es erscheinen also alle Schichten gedreht, die Drehung ist am kleinsten an der Oberfläche der Kugel und nimmt von dort gegen das Innere stetig zu. Denkt man sich durch den Aequator der Kugel einen ebenen Schnitt gelegt, und verbindet correspondirende Punkte der verschiedenen Schichten, so erhält man ein System congruenter Curven, welches sehr geeignet ist, den Zustand der Kugel zu veranschaulichen. Die Gleichung einer dieser Curven ist offenbar:

$$y = x\,\text{tg}\left(\frac{\delta}{i},\ \varrho = \sqrt{x^2+y^2}\right),$$

oder sehr nahezu:

$$y = -\frac{2\pi\omega}{\varkappa}\,x\left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{x^2}{2n+3}\right).$$

In Figur c, Tafel 1 sind diese Curven dargestellt für den Fall, dass die Kugel von Kupfer $R = 50$ mm, $n = 1$ ist, und dass die Kugel 1, 2, 3, 4 Umdrehungen in der Sekunde macht.

3. Es werde drittens angenommen, dass μ so gross sei, dass für die $q(S\lambda)$ und $q(s\lambda)$ ihre angenäherten Werthe gesetzt werden können. Es werde ferner angenommen, dass das

Grosse Rotationsgeschwindigkeiten.

Verhältniss $\frac{r}{R}$ weder sehr nahe $= 1$, noch sehr nahe $= 0$ sei. Ersterer Fall ist schon erledigt, letzterer muss besonders betrachtet werden. Durch Einsetzung der Näherungswerthe in die exacte Formel wird erhalten:

$$\varphi_1 + \varphi_2\sqrt{-1} = \frac{2n+1}{\lambda}\,\frac{S^n}{\sigma^{n+1}}\,\frac{e^{\lambda(\sigma-s)} + e^{-\lambda(\sigma-s)}}{e^{\lambda(S-s)} - e^{-\lambda(S-s)}}.$$

Da S nicht sehr nahe gleich s, beide aber sehr gross sein sollen, so verschwindet im Nenner das zweite Glied gegen das erste, und es wird

$$\varphi_1 + \varphi_2\sqrt{-1} = \frac{2n+1}{\lambda S}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} e^{-\lambda\mu(R-r)}\,(e^{\lambda\mu(\varrho-r)} + e^{-\lambda\mu(\varrho-r)}).$$

Das zweite Glied der Parenthese verschwindet gegen das erste, ausser wenn $\varrho = r$ ist, verzichten wir daher auf eine genaue Kenntniss der Strömung an der innern Grenze, so können wir setzen:

$$\varphi_1 + \varphi_2\sqrt{-1} = \frac{2n+1}{\lambda S}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} e^{-\lambda\mu(R-\varrho)}.$$

Da s oder r aus dieser Gleichung verschwunden ist, so ist anzunehmen, dass sie auch für Vollkugeln Gültigkeit hat, in der That ergiebt sie sich leicht aus den für Vollkugeln geltenden exacten Formeln, wenn man ähnliche Vernachlässigungen macht, wie die oben ausgeführten, und auf eine genaue Kenntniss der Strömung im Centrum verzichtet, (wo übrigens die Intensität sehr klein ist).

In den erhaltenen Ausdrücken ist

$$\lambda = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(1+\sqrt{-1});$$

ohne die Sonderung des Imaginären und Reellen auszuführen finden wir leicht:

$$\text{arc tg}\,\frac{f_2}{f_1} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}\,(R-\varrho)$$

$$\sqrt{f_1^2+f_2^2} = \frac{2n+1}{\mu}\,\frac{R^n}{\varrho^{n+1}}\,e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-\varrho)}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in ψ ein, so erhält man

$$\psi = -\frac{2n+1}{2(n+1)}\,A\sqrt{\frac{i\omega}{\varkappa\pi}}\,e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-\varrho)}\sin\left(i\omega - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-\varrho)\right),$$

welches also diejenige Strömungsfunktion ist, die bei sehr grossen Drehungsgeschwindigkeiten von der äussern Potentialfunktion

$$\chi_n = A\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \cos i\omega\, P_{ni}$$

hervorgerufen wird.

Die Bedeutung obiger Formel lässt sich leicht durchschauen, stellen wir ihr Ergebniss mit den früheren zusammen, so können wir die Erscheinung, welche eine mit beständig wachsender Geschwindigkeit unter dem Einfluss einer inducirenden Kugelfunktion rotirende Hohlkugel darbieten würde, in folgender Weise beschreiben:

Zusammenfassung des Resultats.

Beginnt die Selbstinduction merklich zu werden, so verändert sie die Form der Strömungscurven in den einzelnen Kugelschichten nicht, die letzteren aber beginnen sich scheinbar zu drehen im Sinne der Rotation; dabei gehen die inneren Schichten den äusseren voraus. Die Drehung der inneren Schichten ist an keine Grenze gebunden, sondern kann ins Unendliche wachsen, der Drehungswinkel der äussersten Schicht convergirt gegen den Werth $\frac{\pi}{4i}$, nachdem er übrigens vorher bei Hohlkugeln diesen Werth überschritten haben kann. Ist die Drehungsgeschwindigkeit sehr gross, so liegen correspondirende Punkte verschiedener Schichten auf Archimedischen Spiralen, die Zahl der Windungen derselben in der Kugel wächst mit der Rotationsgeschwindigkeit ins Unendliche.

Die Intensität wächst Anfangs mit der Rotationsgeschwindigkeit, aber nirgends dieser proportional schneller in den äussern, als in den innern Schichten. In der äussersten Schicht wächst sie beständig, schliesslich wie $\sqrt{\omega}$, in allen andern erreicht sie bei einer gewissen Drehungsgeschwindigkeit ein Maximum, um dann wieder abzunehmen. Bei grossen ω nimmt sie vom Rande gegen das Innere ab wie eine Exponentialfunktion, deren Exponent $\sqrt{\omega}$ enthält.

Von Interesse ist noch die Abhängigkeit der Erscheinung von der Ordnungszahl i (deren Quadratwurzel auch in μ enthalten ist), ich verweise deshalb auf die Formeln.

Ein scheinbarer Widerspruch zwischen der Theorie einer

unendlich dünnern Hohlkugel und der einer Hohlkugel von endlicher Dicke mag auffallen; derselbe löst sich leicht, wenn man beachtet, dass jede noch so dünne Hohlkugel nur bis zu einer gewissen Grösse der Rotationsgeschwindigkeit als unendlich dünn betrachtet werden darf.

Fall, dass die Magnete im Innern der Hohlkugel liegen.

Ich will noch kurz den Fall erledigen, dass die inducirenden Magnete im Innern der Hohlkugel liegen, dass also die auftretenden Kugelfunktionen negativer Ordnung sind.

Es sei

$$\chi_n = A\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+1} \cos i\omega\, P_{ni},$$

dann wird

$$\psi_0 = \frac{\omega}{\varkappa} A\varrho\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+1} \frac{i}{n} \sin i\omega\, P_{ni}.$$

Setzen wir nun

$$\psi = \frac{\omega}{\varkappa} A\varrho\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+1} \frac{i}{n} (f_1 \sin i\omega + f_2 \cos i\omega)\, P_{ni},$$

so wird die von ψ inducirte Funktion ψ':

$$\psi' = -\left(\frac{\omega}{\varkappa}\right)^2 A\varrho\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+1} \frac{i^2}{n} (F_1 \cos i\omega - F_2 \sin i\omega)\, P_{ni}.$$

Dabei ist aber der Zusammenhang zwischen f und F ein etwas anderer, als früher; es ist nämlich gesetzt:

$$F(\varrho) = \frac{4\pi}{2n+1}\left\{\int_r^\varrho a f a\, da + \int_\varrho^R \frac{\varrho^{2n+1}}{a^{2n}} f a\, da\right\}.$$

Die Bedingung

$$\psi = \psi_0 + \psi'$$

liefert wieder die Gleichungen:

$$f_1 = 1 + \frac{i\omega}{\varkappa} F_2$$

$$f_2 = -\frac{i\omega}{\varkappa} F_1.$$

Unter Benutzung derselben Abkürzungen, wie früher werden dieselben:

$$\varphi_1\sigma = 1 + \frac{1}{2n+1}\left\{\int_s^\sigma a\varphi_2(a)da + \int_\sigma^S \sigma^{2n+1}a^{-2n}\varphi_2\, a\, da\right\}$$

$$\varphi_2\sigma = -\frac{1}{2n+1}\left\{\int_s^\sigma a\,\varphi_1\, a\, da + \int_\sigma^S \sigma^{2n+1}a^{-2n}\,\varphi_1\, a\, da\right\}.$$

Differenzirt geben diese

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma^{2n+2}\frac{d}{d\sigma}(\sigma^{-2n-1}\varphi_1)\right) = -\sigma\varphi_2$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma^{2n+2}\frac{d}{d\sigma}(\sigma^{-2n-1}\varphi_2)\right) = \quad \sigma\varphi_1$$

oder

$$\varphi_1'' - \frac{2n}{\sigma}\varphi_1' = -\varphi_2$$

$$\varphi_2'' - \frac{2n}{\sigma}\varphi_2' = \quad \varphi_1.$$

Setzt man $\varphi = \sigma^{2n+1}\bar{\varphi}$, so folgen für die $\bar{\varphi}$ die Gleichungen:

$$\bar{\varphi}_1'' + \frac{2n+2}{\sigma}\bar{\varphi}_1' = -\bar{\varphi}_2$$

$$\bar{\varphi}_2'' + \frac{2n+2}{\sigma}\bar{\varphi}_2' = \quad \bar{\varphi}_1,$$

also Gleichungen, welche wieder auf die p_n und q_n führen.

Die Bestimmung der Constanten lässt sich dann ganz analog der früheren ausführen und es wird erhalten:

$$\varphi_1\sqrt{-1} - \varphi_2 = -2(n+1)(2n+1)\frac{\sigma^{2n+1}}{s^{2n+3}}\cdot \frac{q_{n-1}(\lambda S)\,q_n(-\lambda\sigma) - q_{n-1}(-\lambda S)\,q_n(\lambda\sigma)}{q_{n-1}(\lambda S)\,(q_{n+1}(-\lambda s) - q_{n-1}(-\lambda S)\,q_{n+1}(\lambda s)}.$$

Besonders einfach wird die Formel für den Fall, dass S ∞ ist, es sich also um einen kugelförmigen Hohlraum in einer unbegrenzten Masse handelt.

Dann wird $q_{n-1}(\lambda S) = 0$, und also wird

$$\varphi_1\sqrt{-1} + \varphi_2 = -2(n+1)(2n+1)\frac{\sigma^{2n+1}}{s^{2n+3}}\cdot\frac{q_n(\sigma\lambda)}{q_{n+1}(s\lambda)}.$$

Kann man $\mu\varrho = \sigma$ wegen des sehr kleinen Werthes von ω gegen die Einheit vernachlässigen, so kann man für die q_n ihre Werthe für kleine Argumente (Seite 47) setzen und erhält dann:

$$\varphi_1\sqrt{-1} + \varphi_2 = \lambda^2 e^{-\lambda(\sigma-s)},$$

oder da wir die Grössen von der Ordnung σ schon zum Theil vernachlässigt haben

$$\varphi_1\sqrt{-1} + \varphi_2 = \lambda^2 = \sqrt{-1}$$

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = 0,$$

wie es sein muss.

Verschwindet andererseits die Einheit gegen $\mu\varrho$, und ersetzt man demgemäss die q_n durch ihre Näherungswerthe für grosse Argumente (Seite 47), so erhält man

$$\varphi_1 + \varphi_2\sqrt{-1} = (2n+1)\left(\frac{\varrho}{r}\right)^n\frac{1}{s\lambda}\,e^{-\lambda(\sigma-s)}.$$

Daraus ergeben sich ähnliche Erscheinungen, wie an der Vollkugel, die Drehung beträgt $\frac{45^\circ}{i}$ an der innersten Schicht und wächst mit wachsendem ϱ ins Unendliche.

Für ψ findet man

$$\psi = \frac{2n+1}{2n}A\sqrt{\frac{i\omega}{\varkappa\pi}}\,e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}(\varrho-r)}\sin\left(i\omega - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}(\varrho-r)\right),$$

welche Form der für die Vollkugel erhaltenen ganz analog ist.

Zur Vernachlässigung der Selbstinduction.

Man erkennt übrigens, dass schon bei den kleinsten Drehungsgeschwindigkeiten im unbegrenzten Raum ϱ so gross gewählt werden kann, dass die gemachten Annäherungen zulässig sind, es wird daher auch schon bei den kleinsten ω die Induction alle möglichen Winkel durchlaufen, allerdings in Entfernungen, in welchen die Intensität sehr klein ist.

Ich erinnere hier an die Bemerkung, welche wir schon auf Seite 30 betreffs der Vernachlässigung der Selbstinduction gemacht haben.

Es würde ein Leichtes sein, die für Hohlkugeln gewonnenen Resultate auf ebene Platten von endlicher Dicke auszudehnen; um Weitläufigkeiten zu vermeiden, verzichte ich hierauf. Das Wesentliche der Erscheinung lässt sich übrigens ohne Rechnung aus dem Besprochenen abnehmen.

§ 5.

Kräfte, welche die inducirten Strömungen ausüben.

Es sollen jetzt die von den inducirten Strömungen ausgeübten Kräfte und die von denselben erzeugte Wärme berechnet werden. Der letzteren ist die Arbeit gleich, welche geleistet werden muss, um die Rotation zu erhalten.

Das Potential der inducirten Ströme.

A. Das Potential der inducirten Strömungen.

1. Wir berechnen dasselbe zunächst für den äusseren Raum. Der Theil, welcher von der zwischen $\varrho = a$ und $\varrho = a + da$ liegenden Kugelschicht herrührt, ist

Werth desselben im äussern Raum.

$$d\Omega_a = \frac{4\pi n}{2n+1}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{n+1} \psi_{ni}(a)\, da,$$

wenn wir das Glied ψ_{ni} der gesammten Strömungsfunktion ψ betrachten.

Nun ist

$$\psi(a)\, da = -A\,\frac{\omega}{\varkappa}\, a\left(\frac{a}{R}\right)^n \frac{i}{n+1}\,(f_1 a \sin i\omega + f_2 a \cos i\omega)\, P_{ni}\, da.$$

Setzt man diesen Werth in $d\Omega$ ein, und versucht die Integration nach den a auszuführen, so trifft man auf die Integrale

$$\int_r^R a^{2n+2} f(a)\, da.$$

Man hat aber

$$\int_r^R a^{2n+2} f_1\, a\, da$$

$$= \frac{(2n+1)\, R^{2n+1}}{4\pi} F_1(R),$$

nach der Definition für F (Seite 38);

$$= -\frac{(2n+1)\,\varkappa}{4\pi i\omega} f_2(R)$$

nach den Gleichungen, welchen $f_1 f_2 F_1 F_2$ genügen (Seite 39); und ebenso

$$\int_r^R a^{2n+2} f_2\, a\, da$$

$$= \frac{(2n+1)\, R^{2n+1}}{4\pi} F_2 R$$

$$= -\frac{(2n+1)\,\varkappa}{4\pi i\omega}\,(1 - f_1(R)).$$

Mit Benutzung dieser Ausdrücke findet man:

$$\Omega_a = \frac{n}{n+1} A\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} (f_2 R \sin i\omega + (1 - f_1 R)\cos i\omega)\, P_{ni}.$$

Für sehr kleine Drehungsgeschwindigkeiten ist $f_2 = 0$, $f_1 = 1$, also $\Omega = 0$;

für sehr grosse ist $f_1 = f_2 = 0$, also an der Oberfläche der Hohlkugel

$$\overline{\Omega} = \frac{n}{n+1}\,\overline{\chi}_n.$$

Werth im Hohlraum.

2. In ganz derselben Weise lassen sich die Rechnungen für den innern Raum der Hohlkugel ausführen, man findet:

$$\Omega_i = -\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n A\,\{f_2 r \sin i\omega + (1 - f_1 r)\cos i\omega\}\, P_{ni}$$

also für das Gesammtpotential:

$$\Omega_i + \chi_n = A\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \{f_1 r \cos i\omega - f_2 r \sin i\omega\}\, P_{ni}.$$

Für verschwindende Drehungsgeschwindigkeiten wird dieser Ausdruck $= \chi$, für grosse $= 0$, genauer findet sich für grosse μ aus einer Formel, welche wir schon früher angewandt haben (Seite 50)

$$f_1 r + f_2 r\sqrt{-1} = \frac{2(2n+1)}{\lambda\mu}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\frac{1}{e^{\lambda(S-s)} - e^{-\lambda(S-s)}}$$

$$= 2(2n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\frac{1}{\lambda\mu}\, e^{-\lambda\mu(R-r)}.$$

Daraus folgt dann

$$\Omega_i + \chi_n$$

$$= A\frac{2(2n+1)}{\mu r}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^n e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-r)}\cos\left(i\omega - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-r)\right)P_{ni}.$$

Es nimmt also das Potential im Innern bei wachsender Geschwindigkeit ausserordentlich schnell ab, gleichzeitig aber haben seine Niveauflächen die Eigenthümlichkeit, um einen der Rotationsgeschwindigkeit proportionalen Winkel gedreht zu erscheinen, die durch das Potential bedingten Kräfte nehmen also bei allmählig wachsender Geschwindigkeit nach und nach alle Richtungen der Windrose an, und zwar bei beliebig wachsender Geschwindigkeit beliebig oft.

Eigenthümliches Verhalten der magnetischen Kräfte im Hohlraum.

Erzeugte Wärme.

B. Erzeugte Wärme.

Es sei R der Radius einer sehr dünnen Kugelschaale, es herrsche in derselben die Strömungsfunktion

$$\psi = \Sigma\psi_n.$$

Der Widerstand der Schaale sei k, es wird die in ihr erzeugte Wärme W gesucht.

Wärmeerzeugung in einer Kugelschaale.

Wir bestimmen die u, v, w, welche zu ψ gehören, speciell diejenigen, welche zu dem Gliede

$$\psi_{ni} = A\sin i\omega\, P_{ni}$$

gehören. Sind $u\,v\,w$ gefunden, so folgt die erzeugte Wärme

$$W = k\int(u^2 + v^2 + w^2)\,ds,$$

das Integral über die ganze Kugelfläche ausgedehnt.

Führen wir die Bezeichnungen Ω und Θ ein für die Strömungen längs der Breiten- und Meridiankreise in Richtung der wachsenden θ und ω, so haben wir:

$$\Omega = -\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

$$\Theta = -\frac{1}{R\sin\theta}\frac{d\psi}{\partial\omega}$$

$$u = \Theta\cos\theta\cos\omega + \Omega\sin\omega$$
$$v = \Theta\cos\theta\sin\omega - \Omega\cos\omega$$
$$w = -\Theta\sin\theta.$$

Setzt man hierin den angeführten Werth von ψ_{ni} ein, so erhält man:

$$u = \frac{A}{R}\{-\cos i\omega\cos\omega\,(i\,P_{ni}\operatorname{cotg}\theta) + \sin i\omega\sin\omega\,P'_{ni}\}$$

$$v = \frac{A}{R}\{-\cos i\omega\sin\omega\,(i\,P_{ni}\operatorname{cotg}\theta) - \sin i\omega\cos\omega\,P'_{ni}\}$$

$$w = \frac{A}{R}\,i\cos i\omega\,P_{ni}.$$

Nun ist aber:

$$i\,P_{ni}\operatorname{cotg}\theta = \tfrac{1}{2}(P_{n,i+1} + (n+i)\,(n-i+1)\,P_{n,i-1}$$
$$P'_{ni} = \tfrac{1}{2}(-P_{n,i+1} + (n+i)\,(n-i+1)\,P_{n,i-1}).$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in $u\,v\,w$ folgt:

$$u = -\frac{A}{2R}\{\cos(i+1)\omega\,P_{n,i+1} + (n+i)\,(n-i+1)\cos(i-1)\omega\,P_{n,i+1}\}$$

$$v = -\frac{A}{2R}\{\sin(i+1)\omega\,P_{n,i+1} - (n+i)\,(n-i+1)\sin(i-1)\omega\,P_{n,i+1}\}$$

$$w = \frac{A}{R}\,i\cos i\omega\,P_{ni}.$$

Hierdurch sind die $u\,v\,w$ nach Kugelflächenfunktionen entwickelt. In gleicher Form denken wir uns die $u\,v\,w$ für alle Glieder bestimmt, und den Ausdruck

$$\int(u^2 + v^2 + w^2)\,ds$$

gebildet. Bei der Integration geben diejenigen Glieder, welche Producte aus Kugelfunktionen verschiedener Ordnung sind, das Resultat 0, wir können also für jedes ψ_n das entsprechende W_n besonders bestimmen und die Resultate addiren. Eine nähere Betrachtung zeigt dann, dass wir auch für jedes ψ_{ni} die Wärme besonders berechnen und die Resultate addiren können. Es werden allerdings nicht alle Integrale, welche Combinationen aus verschiedenen ψ_i entsprechen, gleich Null werden; aber die Integrale in $\int u^2\,ds$, für welche dies eintritt, werden sich gegen ihnen gleiche in $\int v^2\,ds$ aufheben.

Für das oben angegebene ψ_{ni} erhalten wir nun:

$$W_{ni} = k\int (u^2+v^2+w^2)\,ds$$
$$= \frac{kA^2}{2R^2}\Big\{\int(\cos\,(i+1)\,\omega\;P_{ni})^2\,ds$$
$$+\,(n+i)^2\,(n-i+1)^2\int(\cos\,(i-1)\,\omega\;P_{n,i-1})^2\,ds$$
$$+\,2\,i^2\int(\cos i\omega\;P_{ni})^2\,ds\Big\},$$

was nach bekannten Formeln und einfachen Reductionen ergiebt:

$$W_{ni} = kA^2\cdot\frac{2\pi n(n+1)}{2n+1}\,(n-i+1)\,(n-i+2)\ldots(n+i)$$
$$= kA^2\,(n,i),$$

wo jetzt (n,i) eine leicht verständliche Abkürzung ist. Da wir weiter haben:

$$W = \sum_n\sum_i W_{ni}$$

so ist unsere Aufgabe gelöst. Man erkennt leicht, dass dem Resultat die Formen gegeben werden können:

$$W = \frac{k}{R^2}\sum_n n(n+1)\sum_i\int\psi_{ni}^2\,ds$$

oder

$$W = \frac{k}{R^2}\sum_n n(n+1)\int\psi_n^2\,ds.$$

Der vorliegende Satz hätte, vielleicht einfacher, mittelst einer aus dem Green'schen Satze abgeleiteten Betrachtung bewiesen werden können; in dem hier gegebenen Beweise sind implicite die Formeln enthalten:

Analytische Formeln.

$$\int\left\{\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial\omega_x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial\omega_y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial\omega_z}\right)^2\right\}\,ds = n(n+1)\int\psi_n^2\,ds$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega_x}(\sin i\omega\;P_{ni})$$
$$= -\tfrac{1}{2}\cos(i+1)\omega\,P_{n,i+1} - \tfrac{1}{2}(n+i)(n-i+1)\cos(i-1)\omega\,P_{n,i-1}$$
$$\frac{\partial}{\partial\omega_y}(\sin i\omega)\;P_{ni})$$
$$= -\tfrac{1}{2}\sin(i+1)\omega\,P_{n,i+1} + \tfrac{1}{2}(n+i)(n-i+1)\sin(i-1)\omega\,P_{n,i-1}$$
$$\frac{\partial}{\partial\omega_z}(\sin i\omega\;P_{ni}) = i\cos i\omega\;P_{ni},$$

an welche sich leicht ähnliche anschliessen lassen. Beziehen sich ω, θ und ω', θ' auf Polarcoordinatensysteme mit verschiedenen Achsen, so erlauben die zuletzt angeführten Gleichungen, Integrale von der Form

$$\int\cos i\omega\;P_{ni}(\theta)\,\cos j\omega'\,P_{nj}(\theta')\,ds',$$

(in welchen die ω', θ' als die Integrationsvariabelen betrachtet sind) aus dem bekannten

$$\int P_{no}(\theta)\cos j\omega'\,P_{nj}(\theta')\,ds' = \frac{4\pi}{2n+1}\cos j\omega\;P_{nj}(\theta)$$

abzuleiten, allerdings im Allgemeinen nur mittelst weitläufiger Rechnungen.

Wärmeerzeugung in der rotirenden Kugel.

Ich bestimme jetzt die in der rotirenden Kugel durch das Glied χ_{ni} der inducirenden Potentialfunktion erzeugte Wärme. Zu χ_{ni} gehört

$$\psi_{ni} = -\frac{\omega}{\varkappa}A\varrho\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n\frac{i}{n+1}\,(f_1\sin i\omega + f_2\cos i\omega)\;P_{ni},$$

also die Wärme

$$W_{ni} = \frac{\omega^2}{\varkappa}A^2\,\frac{i^2(n,i)}{(n+1)^2}\int_r^R\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{2n}(f_1^2+f_2^2)\,\varrho^2\,d\varrho.$$

Das Integral kann ausgeführt werden für kleine und für grosse Drehungsgeschwindigkeiten. Für erstere ist $f_1 = 1$, $f_2 = 0$, und es wird daher die erzeugte Wärme in diesem Fall:

Bei kleinen Geschwindigkeiten.

$$W_{ni} = A^2 \frac{R^3 \omega^2}{\varkappa} \frac{i^2 (n, i)}{(n+1)^2 (2n+3)} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+3}\right).$$

Für sehr grosse Drehungsgeschwindigkeiten hingegen war

$$f_1^2 + f_2^2 = \frac{(2n+1)^2}{\mu^2} \frac{R^{2n}}{\varrho^{2n}} e^{-\mu\sqrt{2}(R-\varrho)}.$$

Es wird daher das in W_{ni} vorkommende Integral, welches von $r = 0$ an genommen werden kann, gleich

Bei grossen Geschwindigkeiten.

$$\int_0^R \frac{(2n+1)^2}{\mu^2} e^{-\mu\sqrt{2}(R-\varrho)} d\varrho$$

$$= \frac{(2n+1)^2}{\mu^3 \sqrt{2}},$$

da $R\mu$ als sehr gross betrachtet wird. Wir erhalten sonach für sehr grosse ω:

$$W_{ni} = A^2 \frac{(2n+1)^2 (n, i)}{8 (n+1)^2} \sqrt{\frac{\varkappa \omega i}{2\pi^3}}$$

W ist von R noch insofern abhängig, als dasselbe in A enthalten ist.

Die entwickelte Wärme wächst also ins Unendliche mit wachsendem ω*), und zwar wie $\sqrt{\omega}$. Das gleiche gilt von der zur Erhaltung der Rotation erforderten Arbeit. Bilden die inducirenden Magnete ein fest verbundenes System, so wird demselben ein Drehungsmoment um die Rotationsachse ertheilt, welches sich aus der erzeugten Wärme berechnen lässt. Denkt man sich nämlich die Kugel ruhend, die äussern Magnete rotirend mit der Winkelgeschwindigkeit ω, so leistet das Drehungsmoment D, welches die Bewegung erhält, in der Zeiteinheit die Arbeit $2\pi\omega D$, diese Arbeit ist gleich der erzeugten Wärme, also

$$D = \frac{W}{2\pi\omega}.$$

*) Wegen des scheinbaren Widerspruchs mit dem für ∞ dünne Kugelschaalen erhaltenen Resultate gilt die Bemerkung auf Seite 52 unten.

Es ist aber dies Drehungsmoment gleich demjenigen, welches umgekehrt die rotirende Kugel den ruhenden Magneten ertheilt. Man erkennt leicht, dass für kleine ω, D proportional mit $\frac{\omega}{\varkappa}$ wächst, für grosse ω nimmt es ab mit wachsendem ω, und zwar ist es proportional mit $\sqrt{\frac{\varkappa}{\omega}}$, schliesslich wird es unendlich klein. (Das hindert nicht, dass es eine Arbeit von der Ordnung $\sqrt{\omega}$ leistet). Andererseits sahen wir schon, dass bei unendlichen ω die auf die inducirenden Magnete ausgeübten Kräfte endlich sind, da dieselben nun ein Drehungsmoment um die Rotationsaxe nicht hervorrufen, so müssen ihre Resultanten in einer durch die Axe gelegten Ebene wirken.

Drehungsmoment, welches auf die inducirenden Magnete ausgeübt wird.

In der That verhält sich bei unendlichen ω die Kugel zu den äussern Magneten ähnlich, wie eine leitende Kugel zu elektrischen Massen, eine leitende Kugel kann aber inducirenden Massen keine Rotation um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Achse ertheilen.

§ 6.

Rotation magnetischer Kugeln.

Ich mache jetzt die Annahme, dass die Masse der Kugel fähig sei, magnetische Polarität anzunehmen. Von dem Vorhandensein einer Coercitivkraft sehe ich ab.

Zunächst sind die für diesen Fall geltenden Formen der elektromotorischen Kräfte zu bilden. Nach Anleitung des § 1,6 haben wir, um die Wirkung der Magnetismen zu erhalten, in den allgemeinen Formeln für die elektromotorischen Kräfte zu ersetzen:

$$U \quad \text{durch} \quad \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}$$
$$V \qquad \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}$$
$$W \qquad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Danach ist weiter zu ersetzen:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{durch} \quad \Delta N + \frac{\partial \chi}{\partial z}$$
1) $$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \qquad \Delta M + \frac{\partial \chi}{\partial y}$$
$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \qquad \Delta L + \frac{\partial \chi}{\partial x},$$

da

2) $$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = -\chi \text{ ist.}$$

Nun ist aber

$$\Delta L = -4\pi\lambda$$
3) $$\Delta M = -4\pi\mu$$
$$\Delta N = -4\pi\nu$$

$$\frac{\lambda}{\theta} = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x}$$
4) $$\frac{\mu}{\theta} = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial y}$$
$$\frac{\nu}{\theta} = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial z}.$$

Indem man hiernach L, M, N aus den Ausdrücken 1) eliminirt, und die von den Strömen direct ausgeübten Kräfte $\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$ etc. addirt, erhält man für die Ausdrücke, welche jetzt an Stelle der $\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$ etc. zu treten haben die folgenden:

Die Differentialgleichungen.

$$(1 + 4\pi\theta)\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial z}\right)$$
5) $$(1 + 4\pi\theta)\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial y}\right)$$
$$(1 + 4\pi\theta)\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial x}\right).$$

In denselben bedeutet χ das Gesammtpotential. Dasselbe besteht aber:

1. aus dem gegebenen äusseren Potential der inducirenden Magnete,

2. aus dem Eigenpotential χ_0 der magnetisirten Kugel. Für das letztere gelten die Bedingungen:

Im Innern

6) $$\Delta \chi_0 = 0,$$

wie aus Gleichung 2) und 4) folgt; an der Grenze:

7) $$4\pi\theta N_\varrho = (1 + 4\pi\theta)\frac{\partial \chi_{oi}}{\partial \varrho} - \frac{\partial \chi_{oa}}{\partial \varrho},$$

wenn N_ϱ die von den äussern Magnetismen und den inducirten Strömungen in Richtung des Radius ausgeübte Kraft ist.

In Worten kann man die Wirkung der Polarisirbarkeit des Mediums so aussprechen:

Die Polarisirbarkeit verändert einmal die magnetisirenden Kräfte im Innern in der Weise, wie dies die allgemeine Theorie des Magnetismus angiebt, sie vergrössert zweitens die von den magnetisirenden Kräften verursachten Wirkungen im Verhältniss $1 + 4\pi\theta$. Beide Theile der Wirkung haben entgegengesetzte Tendenz; der Erfolg ist, dass die Wirkung auch für sehr grosse θ nur in endlichem Verhältniss vergrössert erscheint.

Es werde wieder zunächst von der Selbstinduction abgesehen. Es muss aber bemerkt werden, dass dies nur dann erlaubt ist, wenn

Vernachlässigung der Selbstinduction.

$$R\sqrt{\frac{4\pi\omega(1 + 4\pi\theta)}{\varkappa}}$$

sehr klein ist; bei grossen θ und R muss ω auch absolut betrachtet, sehr klein sein, um diese Bedingung zu erfüllen.

Ist das äussere Potential

$$\chi_n = A\varrho^n Y_n,$$

so kann das Eigenpotential der Hohlkugel in der Form dargestellt werden

$$\chi_0 = \left(C + \frac{Br^{2n+1}}{\varrho^{2n+1}}\right)\chi_n$$

und also das Gesammtpotential in der Form

$$\chi = \left(A + B\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n+1}\right)\chi_n.$$

Nach dem Vorigen verhält sich nun die magnetische Hohlkugel genau so, wie eine nicht polarisirbare von gleichem Widerstand, welche unter dem Einfluss des Potentials

$$(1 + 4\pi\theta)\left(A + B\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n+1}\right)\chi_n$$

steht.

Da dies Potential aus zwei Kugelfunktionen besteht, so lassen sich die Strömungen nach dem vorigen als bekannt ansehen.

Für die Strömungsfunktion erhalten wir:

$$\psi = -\frac{\omega}{\varkappa}(1 + 4\pi\theta)\left(\frac{A}{n+1} - \frac{B}{n}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n+1}\right)\varrho\frac{\partial\chi_n}{\partial\omega}.$$

Wären alle Umstände dieselben, nur $\theta = 0$, so würden wir für die Strömungsfunktion ψ_0 erhalten haben

$$\psi_0 = -\frac{\omega}{\varkappa}\frac{\varrho}{n+1}\frac{\partial\chi_n}{\partial\omega}.$$

Durch Division folgt:

$$\psi = (1 + 4\pi\theta)\left(A - \frac{n+1}{n}B\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n+1}\right)\psi_0.$$

Die Form der Strömungen in den einzelnen Schichten ist also nicht geändert, nur ist die Intensität anders vertheilt. Es wird bequem sein, die Erscheinungen durch Vergleichung von ψ mit ψ_0 zu beschreiben. Die Grössen A und B sind durch

die Gleichungen 6) 7) gegeben, setzt man $\frac{r}{R} = \varepsilon$, so werden sie gefunden:

$$A = \frac{(2n+1)\{(2n+1)(1+4\pi\theta) - 4\pi\theta n\}}{n(n+1)16\pi^2\theta^2(1-\varepsilon^{2n+1}) + (2n+1)^2(1+4\pi\theta)}$$

$$B = \frac{4\pi\theta n(2n+1)}{n(n+1)16\pi^2\theta^2(1-\varepsilon^{2n+1}) + (2n+1)^2(1+4\pi\theta)}.$$

Da diese Ausdrücke eine leichte Uebersicht nicht gestatten, so sollen dieselben auf vereinfachte Fälle angewandt werden.

Besondere Fälle:

1. Es sei θ sehr klein. Dann wird durch Entwickelung:

$$A = 1 - \frac{n}{2n+1}4\pi\theta$$

$$B = \frac{n}{2n+1}4\pi\theta$$

also

$$\psi = \psi_0 + \frac{n+1}{2n+1}4\pi\theta\left(1 - \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n+1}\right)\psi_0.$$

θ sehr klein.

Die Intensität der Strömung erscheint also an der Innenfläche der Hohlkugel gar nicht verändert, in den übrigen Theilen der Kugel erscheint sie überall verstärkt, wenn θ positiv ist. Die Verstärkung ist mit θ proportional. In diamagnetischen Kugeln ist die Intensität überall schwächer als in unmagnetischen. Die Drehung magnetischer Kugeln erfordert mehr, die diamagnetischer weniger Arbeit, als die unmagnetischer.

2. Es sei θ sehr gross, und nicht gleichzeitig ε sehr nahe an 1. Dann wird

$$A = \frac{2n+1}{4\pi\theta n(1-\varepsilon^{2n+1})}$$

$$B = \frac{2n+1}{4\pi\theta(n+1)(1-\varepsilon^{2n+1})}$$

θ sehr gross.

und also:

$$\psi = \frac{2n+1}{n}\frac{1-\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n+1}}{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1}}\psi_0.$$

Es ist also hier die Strömung in der innersten Schicht gleich Null, wächst dann aber rasch nach aussen und wird in der Grenzfläche $\frac{2n+1}{n}$ mal so stark, als in der nichtmagnetischen Kugel. Ist θ überhaupt gross, so ist die Verstärkung der Strömung von seinem absoluten Werthe nahezu unabhängig.

3. Es sei ε unendlich nahe gleich 1.

Dünne Hohlkugel.

Dann wird

$$A = \frac{(2n+1)(1+4\pi\theta) - 4\pi\theta n}{(2n+1)(1+4\pi\theta)}$$

$$B = \frac{4\pi\theta n}{(2n+1)(1+4\pi\theta)}.$$

Also wird

$$\psi = \frac{2n+1}{2n+1}\psi_0 = \psi_0.$$

In unendlich dünnen Hohlkugeln ist die Magnetisirbarkeit ohne Einfluss auf die inducirten Strömungen, (obgleich die Polarisationen nicht verschwinden, und die magnetisirenden Kräfte in der Schaale Aenderungen erleiden). Ich bemerke gleich, dass dies Resultat Gültigkeit behalten wird, auch dann, wenn auf die Selbstinduction Rücksicht genommen wird.

4. Es sei $\varepsilon = 0$, das ist der Fall in der Vollkugel.

Das Glied mit negativem Exponenten von ϱ fällt fort; es wird erhalten

Vollkugel.

$$A = \frac{1}{1 + \frac{4\pi\theta n}{2n+1}}$$

$$\psi = \frac{1+4\pi\theta}{1 + \frac{n}{2n+1}4\pi\theta}\psi_0.$$

Für grosse θ folgt daraus

$$\psi = \frac{2n+1}{n}\psi_0.$$

Die Grösse $\frac{2n+1}{n}$ liegt zwischen 2 und 3.

In Eisenkugeln sind die Strömungen also 2 bis 3mal stärker als in einem gleich gut leitenden, nicht magnetischen Metall; die entwickelte Wärme, die gebrauchte Arbeit und bewirkte Dämpfung sind 4—9 mal grösser als in jenem.

5. Ebene Platten.

Eine sehr dünne ebene Platte kann als Theil einer sehr dünnen Hohlkugel angesehen werden, für eine solche ist daher

$$\psi = \psi_o.$$

Eine sehr dicke Platte kann als Theil einer unendlichen Vollkugel angesehen werden, für eine solche ist, da n sehr gross zu setzen ist: Ebene Platten.

$$\psi = \frac{1+4\pi\theta}{1+2\pi\theta}\psi_o.$$

In beiden Grenzfällen bleibt auch die gesammte Strömungsform ungeändert; in dem zuletzt genannten ist bei grossen θ die Intensität durch die Magnetisirbarkeit verdoppelt.

Bei mittleren Dicken der Platten gelten mittlere Werthe, die Rechnungen lassen sich leicht durchführen, geben aber keine sehr einfachen Resultate, weshalb sie hier wegbleiben mögen.

Es werde jetzt die Selbstinduction in Betracht gezogen, jedoch sollen die Rechnungen nur für Vollkugeln durchgeführt werden. Analytische Schwierigkeiten besonderer Natur bieten auch Hohlkugeln nicht, die Rechnungen werden aber äusserst complicirt. Berücksichtigung der Selbstinduction.

Wir finden die Strömung durch folgende Ueberlegungen: Beschränkung auf Vollkugeln.

Sei das inducirende Potential

$$\chi_{ni} = A\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \cos i\omega\, P_{ni}.$$

Sei ψ_o die von χ_{ni} direct inducirte Strömungsfunktion, dann ist:

$$\psi_0 = -\frac{1+4\pi\theta}{1+\frac{n}{2n+1}4\pi\theta}\cdot\frac{\omega}{\varkappa}A\varrho\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n\frac{i}{n+1}\sin i\omega\, P_{ni}.$$

Sei

$$\psi = -\frac{\omega}{\varkappa} A\varrho\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \frac{i}{n+1}\,(f_1 \sin i\omega + f_2 \cos i\omega)\, P_{ni}$$

die thatsächlich stattfindende Strömungsfunktion. Es handelt sich darum, die von dieser inducirte Strömung zu finden. Hierzu ist zunächst die Kenntniss des von ψ in der magnetischen Masse inducirten Potentiales χ_θ erforderlich.

Die von der Strömungsfunktion

$$\psi = \varrho\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n f(\varrho)\; Y_n$$

in Richtung des Radius ausgeübte magnetische Kraft ist

$$N_\varrho = \frac{x}{\varrho}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) + \frac{y}{\varrho}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) + \frac{z}{\varrho}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{O}{\varrho} \qquad \text{(Seite 32)}$$

$$= -\frac{n(n+1)}{\varrho} F\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n, \qquad \text{(Seite 34)}$$

wenn F und f den auf Seite 38 angegebenen Zusammenhang haben.

Hieraus und aus den Bedingungsgleichungen für χ_θ (Gleichung 6) 7) Seite 65) ergiebt sich χ_θ im allgemeinen und in unserm speciellen Falle, und wir erhalten für letzteren:

$$\chi_\theta = \frac{4\pi\theta n(n+1)}{2n+1+4\pi\theta n}$$

$$\cdot\,\frac{\omega}{\varkappa} A \frac{i}{n+1}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \{F_1(R)\sin i\omega + F_2(R)\cos i\omega\}\, P_{ni}.$$

Verstehen wir nun unter ψ' diejenige Strömungsfunktion welche ψ und χ_θ zusammen in der unmagnetischen Kugel erzeugen würden, so veranlassen sie in der magnetischen Masse die Funktion

$$\psi'_\theta = (1+4\pi\theta)\,\psi',$$

und die Bedingung des stationären Zustandes wird werden:

$$\psi = \psi_o + \psi'_\theta.$$

ψ' ist genau so zu bilden, wie früher, also ist auch ψ'_θ bekannt. Setzt man die Werthe von ψ, ψ_o, ψ'_θ in die letzte Gleichung ein und macht die Coefficienten von $\cos i\omega$ und $\sin i\omega$ einzeln der Null gleich, so folgen für die f_1, f_2, F_1 und F_2 die Gleichungen:

$$f_1\varrho = \frac{(2n+1)(1+4\pi\theta)}{2n+1+4\pi\theta n} - \frac{\omega i}{\varkappa}\,\frac{4\pi\theta n(1+4\pi\theta)}{2n+1+4\pi\theta n}\, F_2(R)$$

$$+\frac{\omega i}{\varkappa}(1+4\pi\theta)\, F_2(\varrho)$$

$$f_2(\varrho) = \frac{\omega i}{\varkappa}\,\frac{4\pi\theta n(1+4\pi\theta)}{2n+1+4\pi\theta n}\, F_1(R)$$

$$-\frac{\omega i}{\varkappa}(1+4\pi\theta)\, F_1(\varrho).$$

Setzt man hier

$$\frac{4\pi i\omega\,(1+4\pi\theta)}{\varkappa} = \mu^2$$

$$f_1(\varrho) = \varphi_1(\mu\varrho) = \varphi_1\sigma$$

$$f_2(\varrho) = \varphi_2(\mu\varrho) = \varphi_2\sigma$$

so werden für die φ_1 und φ_2 hier genau dieselben Differentialgleichungen erhalten, wie früher (Seite 41). Da wir eine Vollkugel behandeln, brauchen wir nur diejenigen Lösungen beizubehalten, welche im Mittelpunkte endlich sind, wir können also setzen:

$$\varphi_1 = A\,p_n(\lambda_1\sigma) + B\,p_n(\lambda_2\sigma)$$

$$\varphi_2 = -\lambda_1^2 A\,p_n(\lambda_1\sigma) - B\lambda_2^2\,p_n(\lambda_2\sigma)$$

$$\lambda = \lambda_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(1+\sqrt{-1})$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(1-\sqrt{-1}).$$

Die Bestimmung der Constanten hat hier genau nach derselben Methode zu geschehen, wie oben. Die Integrale, welche zu bilden sind, sind nicht verschieden von den früheren, nur durch die Weitläufigkeit der Constanten wird die Rechnung etwas verwickelter. Das Resultat aber ist ein relativ einfaches, es wird gefunden:

Die Lösung.

$$f_1\varrho + f_2\varrho\sqrt{-1} = \frac{(2n+1)\,(1+4\pi\theta)\,p_n(\lambda\mu\varrho)}{2n\,p_{n-1}(\lambda\mu R) + 4\pi\theta n\,p_n(\lambda\mu R)}.$$

Wir verificiren zunächst dies Resultat. Für verschwindende θ giebt es

$$f_1 + f_2\sqrt{-1} = \frac{2n+1}{2n}\,\frac{p_n(\lambda\mu\varrho)}{p_{n-1}(\lambda\mu R)},$$

Vergleich mit früheren Resultaten.

was mit dem für unmagnetische Vollkugel erhaltenen (Seite 45) übereinstimmt.

Für verschwindende ω ergiebt es ferner, da

$$p_n(0) = \frac{2^{n+1}\,n!}{1\cdot 3\ldots 2n+1}$$

$$f_1 + f_2\sqrt{-1} = \frac{(2n+1)\,(1+4\pi\theta)}{2n+1+4\pi\theta n},$$

was wir gleichfalls gefunden haben. (Seite 68).

Im Allgemeinen ist ersichtlich, dass die Form der Strömung in der magnetischen Kugel dieselbe ist, wie diejenige, welche in einer unmagnetischen Kugel von gleichem Widerstand entsteht, wenn letztere $(1+4\pi\theta)$ mal schneller rotirt als die magnetische Kugel. Beide Strömungen unterscheiden sich dann aber noch dadurch von einander, dass sie, als Ganzes gedacht, um einen gewissen Winkel gegen einander gedreht sind, sowie durch ihre verschiedene Intensität.

Ich wende die Formel auf zwei specielle Fälle an.

Kleine Rotationsgeschwindigkeiten.

1. Es sei $4\pi\theta$ sehr gross, ω aber hinreichend klein, dass $\mu^2 R^2$ gegen die Einheit verschwindet. Es soll die Formel entwickelt werden und nur die erste Potenz dieser Grösse beibehalten werden. Man hat:

$$f_1 + f_2\sqrt{-1} = \frac{2n+1}{n}\,\frac{p_n(\mu\varrho\lambda)}{p_n(\mu R\lambda)}$$

$$= \frac{2n+1}{n}\cdot\frac{2(2n+3) + \mu^2\varrho^2\sqrt{-1}}{2(2n+3) + \mu^2 R^2\sqrt{-1}} \qquad \text{(Seite 47)}.$$

Für den Drehungswinkel erhalten wir unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung:

$$\delta = \operatorname{arctg}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = -\frac{\mu^2}{2(2n+3)}(R^2-\varrho^2)$$

$$\frac{\delta}{i} = -\frac{16\pi^2\omega\,\theta}{2(2n+3)\,\varkappa}(R^2-\varrho^2).$$

Die Drehung ist also Null in der äussersten Schicht*), im Allgemeinen ist sie bedeutend vergrössert gegen die unmagnetische Kugel, nahezu im Verhältniss $4\pi\theta$.

In Figur d, Tafel 1 sind für eine Eisenkugel die Curven dargestellt, welche den auf Seite 50 für eine Kupferkugel gegebenen entsprechen. Dabei ist der Widerstand des Eisens gleich dem 6fachen des Kupfers angenommenen, und $4\pi\theta = 200$ gesetzt. Die dargestellten Geschwindigkeiten sind äusserst geringe, nämlich eine Umdrehung in 10 Sekunden und eine Umdrehung in 5 Sekunden; schon hier macht sich also die Selbstinduction recht bemerklich. Vgl. Taf. 7b.

2. Wird ω sehr gross, während θ einen endlichen, übrigens beliebigen Werth behält, so wird, wie man leicht aus den Formeln ableitet, die Erscheinung derjenigen in unmagnetischen Kugeln durchaus ähnlich werden. Auch hier ist schliesslich der Drehungswinkel in der äussersten Schicht $\frac{\pi}{4i}$. Die Erscheinung ist identisch mit derjenigen, welche in der unmagnetischen Kugel bei einer $(1+4\pi\theta)$ fachen Geschwindigkeit besteht. Die erzeugte Wärme ist dann $\sqrt{1+4\pi\theta}$ mal grösser als in der mit gleicher Geschwindigkeit bewegten unmagnetischen Kugel.

Grosse Geschwindigkeiten.

§ 7.

Verwandte Probleme.

Es sollen in diesem Paragraphen einige Probleme besprochen werden die mit den früher behandelten in engem Zusammenhange stehen.

*) Eine Folge davon, dass in dieser Schicht für grosse θ, nach den Gleichungen für χ_θ

$$N_r - \frac{\partial\chi_\theta}{\partial r} = 0 \quad \text{ist.}$$

I.

Beliebige Rotationskörper.

Sehen wir von der Selbstinduction ab, so können wir die Kenntniss der Strömung in einer Kugel dazu benutzen, um die Strömung in einem beliebig gestalteten Rotationskörper zu bestimmen, oder doch deren Bestimmung auf eine einfachere Aufgabe zurückzuführen.

Es sei S der Rotationskörper, n seine nach innen gekehrte Normale. Wir beschreiben um ihn eine Kugel von beliebigem Radius. Seien $u_1\ v_1\ w_1$ die Strömungen, welche in letzterer stattfinden würden, und

$$N = u_1 \cos a + v_1 \cos b + w_1 \cos c$$

die Strömung in Richtung der n an der Oberfläche von S. Bestimmen wir $u_2\ v_2\ w_2$ so, dass

$$\varkappa u_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}$$

$$\varkappa v_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$$

$$\varkappa w_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0$$

$$u_2 \cos a + v_2 \cos b + w_2 \cos c = -N,$$

so sind offenbar

$$u_1 + u_2,\ v_1 + v_2,\ w_1 + w_2$$

die gesuchten Strömungen in S. Die Aufgabe ist also auf die einfachere zurückgeführt:

Eine Funktion φ_2 so zu bestimmen, dass im Innern von S $\Delta\varphi_2 = 0$ und an der Oberfläche $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \varkappa N$, gleich einer gegebenen Funktion, ist.

1. Es sei beispielsweise eine geradlinig bewegte Platte einseitig begrenzt durch die Gerade $\xi = b$. Es sei die äussere Potentialfunktion aufgelöst und ein Glied derselben

$$A\, e^{-\zeta n} \cos r\eta \cos s\xi.$$

Dann fanden wir für die Strömung in der unendlichen Platte

$$\psi_1 = \frac{r}{n} \cdot \frac{\alpha}{\varkappa} \cdot \sin r\eta \cos s\xi.$$

Also ist die Strömung senkrecht zur Grenze

Geradlinig begrenzte Platten.

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -\frac{r^2}{n} \cdot \frac{\alpha}{\varkappa} \cdot r\eta \cos sb.$$

Daraus folgen für φ_2 die Bedingungen:

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y_2} = 0,$$

und für $\xi = b$:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} = \frac{r^2}{n} \frac{\alpha}{\varkappa} \cos r\eta \cos sb.$$

Also ist:

$$\varphi_2 = \frac{r}{n} \alpha\, e^{r(\zeta - b)} \cos r\eta \cos sb.$$

Zu φ_2 gehört die Strömungsfunktion

$$\psi_2 = -\frac{r}{n} \cdot \frac{\alpha}{\varkappa} \cdot e^{-r(b-\zeta)} \sin r\eta \cos sb;$$

und es wird daher die gesammte Strömungsfunktion

$$\psi_1 + \psi_2 = \frac{r}{n} \cdot \frac{\alpha}{\varkappa} \cdot e^{-rb} \sin r\eta\, (e^{r\xi} \cos sb - e^{rb} \cos s\xi).$$

Durch Summation über alle Glieder folgt die vollständige Lösung. Aehnlich ist die Lösung für beiderseitig begrenzte Streifen.

2. Um die Strömung in einer begrenzten rotirenden Scheibe zu bestimmen, sei ein Glied der äussern Potentialfunktion

$$A\, e^{-n\zeta} \cos i\omega\, J^i(n\varrho).$$

Dann war:

$$\psi_1 = \frac{\omega}{\varkappa} \frac{i}{n} \sin i\omega\, J^i(n\varrho).$$

Also die Strömung in Richtung des Radius nach innen für die Grenze, für $\varrho = R$:

$$\frac{\partial \psi}{R \partial \omega} = \frac{\omega}{\varkappa} \frac{i^2}{n} \cos i\omega \frac{J^i(nR)}{R}.$$

Daraus folgt, wie oben:

Begrenzte Scheibe.

$$\varphi_2 = -\omega \frac{i}{n} J^i(nR) \left(\frac{\varrho}{R}\right)^i \cos i\omega.$$

Nach Bestimmung der diesem φ_2 entsprechenden Strömung ψ_2 folgt die gesammte Strömung:

$$\psi_1 + \psi_2 = \frac{\omega}{\varkappa} \frac{i}{n} \frac{\sin i\omega}{R^i} \{R^i J^i(n\varrho) - \varrho^i J^i(nR)\}.$$

Durch Summation sind wieder die vollständigen Integrale zu erhalten. In gleicher Weise lässt sich die Strömung für Ringe bestimmen, die von concentrischen Kreisen begrenzt sind.

Im Allgemeinen wird weder die Auflösung nach einzelnen Gliedern, noch die Bestimmung des Potentials φ_2 zur Lösung der Aufgabe erforderlich sein, es wird genügen, ψ_2 so zu bestimmen, dass es in der Platte der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} = 0$$

genügt und an der Grenze derselben $= -\psi_1$ wird. Einige einfache Beispiele werden in § 9 gegeben.

II.

Dielektrische Kugeln.

In Leitern bringen die elektromotorischen Kräfte elektrodynamischen Ursprungs dieselben Wirkungen hervor, wie die ihnen numerisch gleichen Kräfte elektrostatischen Ursprungs. Findet das Gleiche in dielektrischen Mitteln statt, so müssen Kugeln aus dielektrischem Material, welche im magnetischen Felde rotiren, eine Polarisation annehmen. Seien

$\mathfrak{x}$
$\mathfrak{y}$ $\quad \frac{mm\frac{1}{2}\, mgr\frac{1}{2}}{\sec^2}$ *)
$\mathfrak{z}$

die Componenten derselben,

ε $\quad$ (Zahl) *)

die Dielektricitätsconstante.

*) Die Einheiten sind wieder derart, dass die Lichtgeschwindigkeit $\frac{1}{A}$ nicht auftritt, die entsprechenden Grössen in magnetischem Maasse sind gleich $A^2\mathfrak{x}$, $A^2\mathfrak{y}$, $A^2\mathfrak{z}$, $A^2\varepsilon$.

Dann gelten für $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ die Gleichungen:

$$\mathfrak{x} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varepsilon \mathfrak{X}$$

$$\mathfrak{y} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varepsilon \mathfrak{Y}$$

$$\mathfrak{z} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \varepsilon \mathfrak{Z}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \Delta\varphi;$$

für $\varrho = R$

$$\mathfrak{x}x + \mathfrak{y}y + \mathfrak{z}z = \frac{\varrho}{4\pi}\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial \varrho}\right].$$

Daraus folgt für φ:

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right)$$

und für $\varrho = R$:

$$(1+4\pi\varepsilon)\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial \varrho} = \frac{4\pi\varepsilon}{\varrho}(x\mathfrak{X} + y\mathfrak{Y} + z\mathfrak{Z}).$$

Im äussern Raum muss sein $\Delta\varphi = 0$.

Ist wieder χ_n das $n$te Glied des äussern Potentiales, so ist, wie oben (Seite 10):

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = 2\omega \frac{\partial \chi_n}{\partial z}$$

$$x\mathfrak{X} + y\mathfrak{Y} + z\mathfrak{Z} = \omega\left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right).$$

Um die Bedingungsgleichungen zu erfüllen, setzen wir:

$$\varphi = \varphi^0 + \varphi'$$

$$\varphi^0{}_i = \frac{4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon}\frac{\omega}{n+1}\left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right)$$

$$\varphi^0{}_a = \frac{4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon}\frac{\omega}{n+1}\left[\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+2}\frac{n}{n+1}\left(\frac{\varrho^2}{2n+1}\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z\chi_n\right) + \left(\frac{R}{\varrho}\right)^n \frac{R^2}{2n+1}\frac{\partial \chi_n}{\partial z}\right]$$

φ_i^0 genügt der partiellen Differentialgleichung, welcher φ genügen soll. φ_a^0 ist so gebildet, dass es 1. der Gleichung

$$\Delta \varphi_a^0 = 0$$

genügt, 2. an der Oberfläche der Kugel mit φ_i^0 zusammenfällt. Dass erstere Bedingung erfüllt ist, erkennt man daraus, dass die überstrichenen Ausdrücke Kugelflächenfunktionen $(n+1)$ten und $(n-1)$ten Grades sind, wie man leicht nachweist. Durch Einsetzung von $\varphi^0 + \varphi'$ in die Bedingungen für φ erhält man für φ' die Gleichungen:

$$\Delta\varphi' \text{ überall } = 0, \quad \varphi' \text{ stetig},$$

für $\varrho = R$:

$$(1 + 4\pi\varepsilon)\frac{\partial \varphi_i'}{\partial \varrho} = \frac{\partial \varphi_a'}{\partial \varrho} + \frac{\partial \varphi_a^0}{\partial \varrho},$$

deren Erfüllung keine Schwierigkeit hat, da wir φ^0 schon als Summe von Kugelfunktionen dargestellt haben.

Von besonderem Interesse ist der Fall, dass ein kugelförmiger Magnet in einem, ihn umgebenden ruhenden Dielektrikum rotirt, da die Erde ein rotirender Magnet und der Weltraum nach der Annahme vieler Physiker ein Dielektricum ist. Um in diesem Falle das elektrische Potential zu bestimmen, haben wir zu beachten, dass die Erde ein Leiter ist, es wird daher auch in ihr eine Vertheilung eintreten, die auf das Dielektricum zurückwirkt, und zur Folge hat, dass an der Oberfläche der Erde das Potential constant wird.

Erde im dielektrischen Raum.

Ist $\chi = \Sigma\chi_n$ das Potential der Erde, so ist die Aufgabe diese:

φ so zu bestimmen, dass im äussern Raum

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi\varepsilon}{1 + 4\pi\varepsilon} \cdot 2\omega \frac{\partial \chi}{\partial z},$$

und an der Oberfläche $\varphi = \text{const}$ ist.

Man findet leicht:

$$\varphi = \frac{4\pi\varepsilon}{1 + 4\pi\varepsilon}\,\omega \sum \frac{R^2 - \varrho^2}{2n+1}\frac{\partial \chi_n}{\partial z}.$$

Für die Steigung des Potentials an der Erdoberfläche folgt daraus:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{4\pi\varepsilon}{1 + 4\pi\varepsilon}\, 2R\omega \sum \frac{1}{2n+1}\overline{\frac{\partial \chi_n}{\partial z}}.$$

Bei Weitem der grösste Theil der erdmagnetischen Kraft rührt von den Gliedern her, für welche $n = -2$, oder doch klein ist. Annähernd können wir daher setzen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{4\pi\varepsilon}{1 + 4\pi\varepsilon}\,\frac{2}{3}\,R\omega\,\overline{\frac{\partial \chi}{\partial z}}.$$

$\overline{\frac{\partial \chi}{\partial z}}$ ist die gegen den Nordpol des Himmels gewandte Componente der erdmagnetischen Kraft.

Nimmt man an, dass für den Weltraum $\frac{4\pi\varepsilon}{1 + 4\pi\varepsilon}$ sehr nahe an 1 sei, so erhält man für die elektrischen Steigungen Werthe, die von der Ordnung von 1 Daniell auf 50 m., also ausserordentlich klein, sind. Zu dem obigen Werthe von φ kann übrigens noch ein Glied von der Form $\frac{\text{const}}{\varrho}$ hinzutreten. Der Werth desselben hängt ab von der Menge der freien Elektricität, welche die Erde mit sich führt, und ist nicht Null, wenn diese Menge Null ist; die Ordnung der berechneten Kräfte wird aber durch dieses Glied nicht geändert.

III.

Rotirt eine beliebig magnetisirte Kugel in einer Flüssigkeit, die selber leitet und die Oberfläche der Kugel leitend berührt, so wird die Kugel in der Flüssigkeit Ströme verursachen, die im Allgemeinen nicht mehr in concentrischen Kugelschaalen erfolgen, sondern den Magneten durchsetzen.

Kugelförmiger Magnet in einer Flüssigkeit.

Die Bestimmung dieser Ströme hat, von der Selbstinduction abgesehen, keine Schwierigkeit mehr, ich will auf die Rechnungen nicht eingehen. Figur e, Tafel 1 soll den einfachsten Fall veranschaulichen: Eine homogen magnetisirte Kugel ro-

tirt um ihre magnetische Axe. Die gezeichnete Figur stellt die Strömungslinien in einem Meridianschnitt dar. Die Form derselben ist hier unabhängig von den Widerständen der Flüssigkeit und des Magneten. Die Intensität aber wird Null, wenn einer derselben unendlich wird.

§ 8.

Lösung für die Formeln des Potentialgesetzes.

Ich habe bisher für die inducirten elektromotorischen Kräfte diejenigen Formen angenommen, welche Herr Jochmann für dieselben aus dem Weber'schen Grundgesetze abgeleitet hat. Ich will jetzt untersuchen, welche Aenderungen die Resultate erleiden durch Anwendung der aus dem Potentialgesetz folgenden Formeln, welche im 78. Bande des Borchardt'schen Journales gegeben sind.

Bezeichnen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die bisher angenommenen elektromotorischen Kräfte, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ die aus dem Potentialgesetz folgenden, so ist

$$\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} - \omega \frac{\partial}{\partial x}(Vx - Uy)$$

$$\mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y} - \omega \frac{\partial}{\partial y}(Vx - Uy)$$

$$\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z} - \omega \frac{\partial}{\partial z}(Vx - Uy).$$

Wir haben aber auf Seite 36 gesehen, dass für alle in der Untersuchung vorkommenden $U\,V\,W$ wird:

$$\varphi = \omega\,(Vx - Uy).$$

Man übersieht sofort, dass wir die bisherigen Lösungen in Bezug nuf u, v, w, ψ, Ω, unverändert beibehalten können. Die einzige Aenderung, welche wir vorzunehmen haben, ist die, dass wir für das Potential der freien Elektricität φ' jetzt zu setzen haben

$$\varphi' = \text{const.},$$

und, wenn ursprünglich freie Elektricität nicht vorhanden war:

$$\varphi' = 0.$$

Auf einer unendlichen Kugel oder ebenen Platte muss immer sein

$$\varphi' = 0.$$

Zu dem gleichen Resultate ist Herr Maxwell gelangt, indem er von den Gleichungen des Potentialgesetzes für ruhende Leiter ausging. Verwirft man die Glieder $\alpha U + \beta V + \gamma W$ in den Formeln der elektromotorischen Kräfte für bewegte Leiter, so sind auch die Gleichungen für ruhende Leiter abzuändern, und die Gleichung

$$\varphi = 0$$

gilt dann nicht mehr.

§ 9.

Specielle Fälle und Anwendungen.

Zum Schlusse sollen die gefundenen Formeln auf einige specielle Fälle angewandt werden.

1. Ein einzelner Magnetpol von der Intensität 1 bewege sich geradlinig parallel einer unendlich dünnen ebenen Platte. In den Fusspunkt des von ihm auf die Platte gefällten Perpendikels werde der Anfangspunkt der $\xi\eta\zeta$ gelegt, die negative η-Ache falle mit der Richtung seiner Bewegung zusammen*). Die Coordinaten des Poles seien 0, 0, $-c$, dann ist sein Potential: Magnetpol über einer ebenen Platte.

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta + c)^2}} = \frac{1}{r}.$$

Also wird das inducirte Potential erster Ordnung für positive ζ:

$$\Omega_1 = -\frac{2\pi\alpha}{k}\int_{\zeta}^{\infty}\frac{\partial\chi}{\partial\eta}\,d\zeta$$

$$= \frac{2\pi\alpha}{k}\,\frac{\eta}{\eta^2 + \xi^2}\left(1 - \frac{\zeta + c}{r}\right).$$

*) Dann wird α positiv.

Daraus folgt das Potential zweiter Ordnung:

$$\Omega_2 = -\frac{2\pi\alpha}{k}\int_{\zeta}^{\infty}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\eta}\,d\zeta$$

$$=\left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^2\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{(c+\zeta-r)\eta}{\eta^2+\xi^2}\right\}$$

$$=\left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^2\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left\{\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2+\eta^2}(c+\zeta-r)-\frac{\eta^2}{r}\right\}.$$

In derselben Weise kann weiter gerechnet werden.

Für die Strömungsfunktionen erster und zweiter Ordnung erhalten wir:

$$\psi_1 = \frac{\alpha}{k}\,\frac{\eta}{\eta^2+\xi^2}\left(1-\frac{c}{r}\right)$$

$$=\frac{\alpha}{k}\,\frac{\eta}{r\,(r+c)}\ ^*),$$

$$\psi_2 = -\,2\pi\left(\frac{\alpha}{k}\right)^2\frac{r\xi^2+c\eta^2}{(r^2-c^2)\,(r+c)\,r},$$

worin jetzt $r^2=\xi^2+\eta^2+c^2$ ist.

In der η-Achse ist: ($\xi=0$)

$$\psi_2 = -\,2\pi\left(\frac{\alpha}{k}\right)^2\frac{c}{(r+c)r},$$

also

$$\psi=\psi_1+\psi_2=\frac{\alpha}{k}\,\frac{1}{(r+c)r}\left(\eta-\frac{2\pi\alpha c}{k}\right).$$

Als den Mittelpunkt der Erscheinung können wir den Punkt $\xi=0$, $\psi=0$ bezeichnen, derselbe erscheint also in Folge der Selbstinduction verschoben um die Strecke $\frac{2\pi\alpha c}{k}$ und zwar bleibt er um die genannte Länge hinter dem bewegten Pole zurück. Das gleiche gilt von der gesammten Erscheinung in der Nähe des Pols.

Verschiebung der Inductionserscheinung.

Für unendliche Geschwindigkeiten wird

*) Dies Resultat stimmt vollständig mit dem von Herrn Jochmann erhaltenen überein.

$$\Omega_+ = -\chi = -\frac{1}{r},$$

$$\psi = -\frac{1}{2\pi r};$$

für sehr grosse Werthe von $\frac{2\pi\alpha}{k}$:

$$\Omega = -\chi - \frac{k}{2\pi\alpha}\int_0^{\eta}\frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\,d\eta$$

$$=-\frac{1}{r}+\frac{k}{2\pi\alpha}\,\frac{\eta\,(\zeta+c)}{r\,(r^2-\eta^2)}$$

$$\psi = -\frac{1}{2\pi r}\left(1-\frac{k}{2\pi\alpha}\,\frac{\eta c}{\xi^2+c^2}\right).$$

Auch hier ist die Abscisse des Punktes $\xi=0$, $\psi=0$:

$$\eta=\frac{2\pi\alpha c}{k},$$

da aber dieser Werth sehr gross ist, und unsere Formel nur für endliche η gilt, so ist er nicht als exact zu betrachten.

Das Potential der freien Elektricität in der Platte ist:

$$\varphi = \alpha\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial\eta}(\chi+\Omega)\,d\zeta,$$

also für kleine Geschwindigkeiten:

$$\varphi = \alpha\int_0^{\infty}\frac{\partial\chi}{\partial\xi}\,d\zeta = -\alpha\,\frac{\xi}{r\,(r+c)}.$$

Die Niveaulinien haben also in diesem Fall dieselbe Form wie die Stromlinien. Für sehr grosse Geschwindigkeiten ist:

$$\varphi = \frac{\varkappa}{2\pi}\int_0^{\eta}\frac{\partial\chi}{\partial\xi}\,d\eta = -\frac{\varkappa}{2\pi}\,\frac{\eta\xi}{r\,(r^2-\eta^2)},$$

welche Formel im Unendlichen ihre Gültigkeit verliert.

Die hier entwickelten Formeln sind durch Tafel 2 und 3 veranschaulicht. Die der Zeichnung zu Grunde gelegten Annahmen sind die folgenden:

Die Platte ist von Kupfer (also $\varkappa = 227000$), ihre Dicke ist 2 mm (also $k = 113500$). Der Abstand des Pols von der Platte ist 30 mm. Die eingeschriebenen Werthe von ψ geben absolutes Maass, wenn die Stärke des Pols $= 13700 \frac{mm^{\frac{3}{2}}\, mgr^{\frac{1}{2}}}{\text{sec}}$ ist.

Zu Tafel 2 und 3.

Auf Tafel 2 ist die Geschwindigkeit des Pols 5 $\frac{\text{mtr}}{\text{sec}}$ ($\alpha = 5000$), dabei stellt a die Erscheinung ohne Berücksichtigung der Selbstinduction, b mit Berücksichtigung derselben dar.

Tafel 3c) giebt die Erscheinung für die Geschwindigkeit 100 $\frac{\text{mtr}}{\text{sec}}$, berechnet aus der für grosse $\frac{2\pi\alpha}{k}$ geltenden Formel. Bei dem gewählten Werthe ist allerdings die Annäherung noch keine sehr vollkommene. Tafel 3 d) entspricht unendlicher Geschwindigkeit des Pols, in die Zeichnung sind auch die Niveaukurven des elektrischen Potentials eingetragen. Die eingeschriebenen Werthe des letzteren bedeuten Millionen der von uns gebrauchten Einheiten.

Der Zusammenhang der verschiedenen Zustände geht aus den Zeichnungen selbst klar hervor.

Magnetpol über einer Scheibe.

2. Ein ruhender Magnetpol befindet sich über einer rotirenden unendlichen Scheibe. Die xz Ebene werde durch den Pol gelegt. Neben den $x\,y\,z$ führen wir die $\xi\,\eta\,\zeta$ ein, deren Nullpunkt der Fusspunkt des vom Pol auf die Platte gefällten Perpendikels sei. Uebrigens sei

$$\xi = x - a$$
$$\eta = y$$
$$\zeta = z,$$

also

$$\frac{\partial}{\partial\omega} = a\frac{\partial}{\partial\eta} + \xi\frac{\partial}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial}{\partial\xi}.$$

a ist der Abstand des Poles von der Rotationsaxe, sei c sein Abstand von der Platte. Dann ist

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta+c)^2}} = \frac{1}{r}.$$

Also

$$\Omega_1 = -\frac{2\pi\omega}{k}\int_\zeta^\infty \frac{\partial\chi}{\partial\omega}\,d\zeta,$$

also, da

$$\xi\frac{\partial\chi}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial\chi}{\partial\xi} = 0 \text{ ist.}$$

$$\Omega_1 = -\frac{2\pi\omega a}{k}\int_\zeta^\infty \frac{\partial\chi}{\partial\eta}\,d\zeta$$

$$= \frac{2\pi\omega a}{k}\frac{\eta}{\eta^2+\xi^2}\left(1 - \frac{\zeta+c}{r}\right)$$

$$\psi_1 = \frac{\omega a}{\varkappa}\frac{\eta}{r(r+c)}.$$

Die Form der Strömungskurven ist also unabhängig von der Entfernung des Pols von der Achse*). Für die Induction zweiter Ordnung findet man

$$\Omega_2 = \left(\frac{2\pi\omega}{k}\right)^2 a\frac{\partial}{\partial\omega}\left\{\frac{(\zeta+c-r)\,\eta}{\xi^2+\eta^2}\right\}$$

$$\psi_2 = -\left(\frac{2\pi\omega}{k}\right)^2 a\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\eta}{r+c}\right)$$

$$= -2\pi\left(\frac{\omega a}{k}\right)^2\left(\frac{r\xi^2+c\eta^2}{(r^2-c^2)(r+c)\,r} + \frac{\xi}{a(r+c)}\right),$$

welche Formeln im Unendlichen keine Gültigkeit haben.

Bei kleiner Drehungsgeschwindigkeit, und falls der inducirende Pol nicht sehr nahe an der Achse liegt, können wir den Punkt $\xi = 0$, $\psi = 0$ als den Mittelpunkt der Erscheinung bezeichnen. Die Ordinate desselben wird gefunden

$$\eta_0 = \frac{2\pi\omega a c}{k}.$$

---

*) Wie schon von Herrn Jochmann gefunden.

Drehung der Inductionserscheinung.

In der Nähe des Pols ist also die Erscheinung in Folge der Selbstinduction gedreht um den Winkel

$$\frac{2\pi\omega c}{k},$$

im Sinne der Drehungsrichtung der Scheibe.

Geradlinige Ströme und unbegrenzte Scheibe.

3. Ich will die Formeln jetzt auf ein neues Beispiel anwenden. Ueber die rotirende Scheibe mögen parallel der x Achse zwei Dräthe gespannt sein, die in entgegengesetzten Richtungen von gleichen Strömen von der Intensität 1 durchflossen sind. Für einen einzelnen Strom würden die inducirten Ströme in der unendlichen Scheibe unendlich werden.

Die Coordinaten der Punkte, in welchen die Drähte die yz Ebene durchsetzen, seien 0, a, $-c$, und 0, a', $-c'$, es ist dann für positive z:

$$\chi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y-a}{z+c}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y-a'}{z+c'}\right).$$

Daraus folgt durch die mehrfach angewandten Formeln, wenn r und r_1 die senkrechten Abstände von den Drähten bezeichnen:

$$\Omega = \frac{2\pi\omega}{k}\, x \,\lg\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

$$\psi = \frac{\omega}{k}\, x \,\lg\left(\frac{r}{r_1}\right).$$

Für das Potential der freien Elektricität in der Platte findet man

$$\varphi = \omega y \,\lg\left(\frac{r}{r_1}\right),$$

die Linien gleichen Potentials sind also Gerade, welche den Drähten parallel laufen. Auf Tafel 4a) sind die Stromlinien für den Fall gezeichnet, dass

Zu Tafel 4a.

$$c = c' = 10 \text{ mm}, \quad a = -a' = 20 \text{ mm} \text{ ist.}$$

Da übrigens im Unendlichen die Strömungen unendlich werden, so wird man sich $\frac{2\pi\omega}{k}$ ausserordentlich klein denken

müssen, um noch in einem endlichen Gebiete eine gute Annäherung zu erhalten.

Da ferner alle Ströme im Unendlichen geschlossen sind, lässt sich nicht ohne Weiteres von der unendlichen auf die begrenzte Scheibe schliessen.

Ich will deshalb nach der § 7 entwickelten Methode die Strömung unter übrigens gleichen Umständen in einer endlichen Scheibe berechnen. Der Radius der letzteren sei R.

Die exacte Lösung des Problems erfordert die Entwickelung ziemlich complicirter Funktionen in sinus- und cosinus-Reihen, ich mache deshalb die vereinfachende Annahme, dass der senkrechte Abstand der stromtragenden Drähte vom Mittelpunkt der Scheibe gross gegen die Dimensionen der letzteren sei.

Geradlinige Ströme und begrenzte Scheibe.

Sei zunächst wieder

$$c = c', \quad a = -a'.$$

Entwickelt man

$$\psi_1 = \frac{\omega}{k}\, x \,\lg\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

nach Potenzen der Coordinaten und vernachlässigt die höheren Potenzen des Ausdrucks

$$\frac{\eta^3}{c^2+a^2},$$

so erhält man:

$$\psi_1 = -\frac{2axy}{c^2+a^2} + \frac{2ay^3x(3c^2-a^2)}{3(c^2+a^2)^3} + \ldots$$

$$= -\frac{a\varrho^2 \sin 2\omega}{c^2+a^2} + \frac{(3c^2-a^2)a}{6(c^2+a^2)^3}\,\varrho^4\left(\sin 2\omega - \frac{\sin 4\omega}{2}\right).$$

Das entsprechende ψ_2 (§ 7, I, Schluss) ist:

$$\psi_2 = \frac{a\varrho^2 \sin 2\omega}{c^2+a^2} - \frac{(3c^2-a^2)a}{6(c^2+a^2)^3}\,\varrho^2\left(R^2 \sin 2\omega - \frac{\varrho^2 \sin 4\omega}{2}\right).$$

Also wird:

$$\psi = -\frac{a(3c^2-a^2)}{6(c^2+a^2)^3}\,\varrho^2 \sin 2\omega\,(R^2-\varrho^2).$$

Die Form der Strömung ist also unabhängig von dem Verhältniss $a : c$, ihre Intensität ist aber wesentlich von demselben bedingt. Ist $a = 0$ oder $a = \sqrt{3} \cdot c$, so wird sie gleich Null. Ist $a < c\sqrt{3}$, so ist die Richtung der Ströme dieselbe wie in der unendlichen Scheibe, ist $a > c\sqrt{3}$, so wird sie die entgegengesetzte. Bei genauer Betrachtung der Vertheilung der wirkenden Kräfte lässt sich dies zunächst auffällige Resultat wohl verstehen. Die Form der Erscheinung ist in Tafel 4 b dargestellt.

Zu Tafel 4 b.

Ebenso lässt sich die Aufgabe für eine beliebige Lage der Drähte lösen. Rückt der eine derselben ins Unendliche, so bleiben in der endlichen Scheibe die Ströme endlich, und wir erhalten, unter Bewahrung der ersten beiden Potenzen der Dimensionen der Scheibe:

$$\psi = \frac{c^2 - a^2}{8(c^2 + a^2)^2}\,\varrho\,\cos\omega\,(R^2 - \varrho^2)$$

$$- \frac{a(3c^2 - a^2)}{12(c^2 + a^2)^3}\,\varrho^2 \sin 2\omega\,(R^2 - \varrho^2).$$

Der Zusammenhang mit dem vorigen Resultat ist leicht ersichtlich.

Zu Tafel 5.

Auf Tafel 5 sind zwei besondere Fälle dargestellt. In a) geht der geradlinige Draht durch die Rotationsaxe in hinreichender Entfernung von der Scheibe, es verschwindet in diesem Falle das zweite der oben beibehaltenen Glieder. In b) liegt der Draht in der Ebene der Scheibe und zwar in derjenigen Entfernung von derselben, in welcher er in der Figur selbst dargestellt ist.

Rotirende Hohlkugeln.

4. Sollen über die Drehungserscheinungen der Induction messende Versuche angestellt werden, so sind zu denselben durchaus dünne Hohlkugeln zu verwenden, da für diese sich die Rechnungen leicht und exact ausführen lassen. Die einfachste Form des Versuches würde die sein, dass man eine solche Hohlkugel unter dem Einfluss einer constanten Kraft rotiren lässt. Die Drehung der Stromebenen kann entweder durch den Einfluss derselben auf einen sehr kleinen Magnet,

Ausführung von Versuchen.

oder besser auf galvanometrischem Wege nachgewiesen werden.

Ich will für ein Beispiel den Drehungswinkel und das magnetische Moment der rotirenden Hohlkugel bestimmen.

Die Kugel sei von Kupfer, ihr Radius 50 mm, ihre Wandstärke 2 mm; da $n = 1$, $i = 1$, so hat man:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{4\pi}{3}\,\frac{R\omega}{k},$$

und für das Moment der Kugel findet man leicht, wenn T die inducirende Kraft ist:

$$M = T\,\frac{R^3 \sin\delta}{2}.$$

Ist q die Zahl der Umdrehungen in der Sekunde, so ist

$$\omega = 2\pi q,$$

und da $k = 113500$, so findet man

$$\operatorname{tg}\delta = 0.0116\,q.$$

Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet:

q	δ	$\frac{M}{T}$	q	δ	$\frac{M}{T}$
5	3° 19′	3614	80	42° 51′	42500
10	6° 27′	7178	90	46° 13′	45100
20	13° 3′	14110	100	49° 13′	47310
30	19° 10′	20520	200	66° 40′	57360
40	24° 53′	26290	500	80° 15′	61570
50	30° 60′	31340			
60	34° 49′	35680	∞	90°	62500
70	39° 4′	39380			

Rotirende Vollkugeln und constante Kraft.

5. Die Tafeln 6. und 7. sind dazu bestimmt, den Strömungszustand in Vollkugeln zu veranschaulichen, welche unter dem Einfluss einer constanten zur Drehungsaxe senkrechten Kraft rotiren.

Die geschlossenen Strombahnen sind hier sämmtlich Kreise, deren Ebenen der Drehungsaxe parallel sind. Kennt man daher die Stromdichtigkeit in der Ebene des Aequators, so ist es sehr leicht, dieselbe in allen andern Punkten zu bestimmen. Für die $x\,y$ Ebene ist aber in unserm Falle $u = v = 0$, also die Stromdichtigkeit $= w$. Die Zeichnungen stellen nun die Dichtigkeit der Strömung in der genannten Ebene durch die Curven:

Zu Tafeln 6 und 7.

$$w = \text{const.}$$

dar.

Die eingeschriebenen Werthe von w geben absolutes Maass, wenn die wirkende Kraft

$$T = 289\ \frac{mgr\,\frac{1}{2}}{mm\,\frac{1}{2}\,\text{sec}}\ \text{ist.}$$

Die Grösse der Kugeln ist die gezeichnete ($R = 50$ mm).

Auf Tafel 6 ist eine Kupferkugel bei 5 Umdrehungen in der Sekunde dargestellt, (in a ohne Berücksichtigung der Selbstinduction).

Auf Tafel 7 a ist dieselbe Kugel dargestellt bei 50 Umdrehungen in der Sekunde.

Figur b derselben Tafel giebt die Strömung in einer Eisenkugel bei 5 Umdrehungen in der Sekunde. Dabei ist der Widerstand des Eisens gleich dem 6 fachen des Kupfers und $4\pi\theta = 200$ angenommen. Man sieht, dass schon bei der genannten mässigen Geschwindigkeit eine Vernachlässigung der Selbstinduction durchaus keine Annäherung mehr bieten würde.

Anhaltung rotirender Kugeln durch einen Elektromagneten.

6. Ein häufig ausgeführtes Experiment besteht darin, dass leitende Kugeln, welche zwischen den Polen eines nicht erregten Elektromagneten rotiren, durch plötzliche Erregung desselben zur Ruhe gebracht werden. Die Theorie dieses Experiments ist sehr einfach, wenn man das magnetische Feld als homogen betrachtet, von der Selbstinduction absieht, und die Strömung in jedem Augenblick wie eine stationäre behandelt. Ist T die

magnetische Kraft, welche in Richtung der x wirkt, so ist die äussere Potentialfunktion

$$\chi = -\,T\varrho\,\sin\theta\,\cos\omega,$$

also

$$\psi = \frac{\omega}{2\varkappa}\,T\varrho^2\,\sin\theta\,\sin\omega,$$

und demnach die erzeugte Wärme: (§ 6.)

$$W = \frac{2\pi R^5}{15}\cdot\frac{T^2\omega^2}{\varkappa}.$$

Ist F das Trägheitsmoment der Kugel, ω_0 ihre Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$, und rotirt sie ohne den Einfluss äusserer Kräfte, so ist die Gleichung ihrer Bewegung

$$\frac{F\omega^2}{2} + \frac{2\pi}{15}\frac{T^2R^5}{\varkappa}\int_0^t\omega^2\,dt = \frac{F\omega_0^2}{2},$$

oder

$$\omega = \omega_0\,e^{-\frac{2\pi}{15}\frac{T^2R^5}{F\varkappa}t}.$$

Ist q die Masse eines Cubikmillimeters der Substanz, so ist

$$F = \frac{8}{15}\,q\,\pi\,R^5,$$

also

$$\omega = \omega_0\,e^{-\frac{T^2}{4q\varkappa}t}.$$

Ein analoges Gesetz gilt, wenn sich die Kugel unter dem Einfluss rotirender Magnete in Bewegung setzt.

Kugeln verschiedener Radien und Hohlkugeln werden mit gleicher Schnelligkeit in Bewegung gesetzt und zur Ruhe gebracht. Dies entspricht in der That einer Beobachtung von Matteucci*).

Beobachtung Matteucci's.

Der Winkel welchen die Kugel nach Erregung des Elektromagneten noch zurücklegt, beträgt:

$$\int_0^\infty\omega\,dt = \frac{4\,q\,\varkappa}{T^2}\,\omega_0.$$

*) Wiedemann, Galvanismus, § 878.

Für stark magnetische Kugeln findet man:

$$\int_0^\infty \omega\, dt = \frac{4\,q\,\varkappa}{9\,T^2}\,\omega_0\,.$$

Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet. In derselben ist $T = 5000$ angenommen, was einem mässig starken Elektromagneten entspricht. Die Anfangsgeschwindigkeit ist gleich einer Umdrehung (2π) in der Sekunde genommen. Die zurückgelegten Winkel sind in ganzen Umdrehungen angegeben. Die relativen Werthe gelten für jedes T und jedes ω_0.

Stoff:	$\int_0^\infty \omega\, dt$
Aluminium . .	0.14
Eisen	0.16
Silber	0.27
Kupfer . . .	0.31
Neusilber . . .	3.90
Graphit . . .	27,2
Conc. Lösung von Kupfervitriol .	ca. 544000

7. Dämpfung in einem Galvanometer.

Dämpfung im Galvanometer.

In einer leitenden Hohlkugel schwinge ein Magnet, derselbe sei entweder sehr klein, oder habe angenähert die Gestalt einer homogen magnetisirten Kugel, ist dann M sein Moment, so ist in der Hohlkugel

$$\chi = -\frac{M}{\varrho^3}\sin\theta\cos\omega,$$

also

$$\psi = -\frac{\omega}{\varkappa}\,\frac{M}{\varrho}\sin\theta\sin\omega$$

und die erzeugte Wärme per Sekunde:

$$W = \frac{8\pi}{3}\,\frac{M^2\,\omega^3}{\varkappa}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right),$$

wenn, wie immer, r den innern, R den äusseren Radius der Hohlkugel bezeichnet.

Es sei jetzt φ der Ausschlag der Nadel aus der Ruhelage, F das Trägheitsmoment derselben, dann sind ihre Schwingungen bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{MT}{F}\,\varphi + 2\varepsilon\,\frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Schreiben wir dieselbe

$$d\left(\frac{F\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}{2}\right) + d\left(\frac{MT\varphi^2}{2}\right) + 2\varepsilon\,F\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 dt = 0$$

so sehen wir, dass

$$2\,\varepsilon\,F\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 dt$$

die während dt erzeugte Wärme ist, und dass wir also haben:

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{3}\,\frac{M^2}{\varkappa F}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right).$$

Ist ε klein, so erhält man daraus für das logarithmische Decrement der Nadel:

$$\lambda = \frac{4\pi^2}{3\varkappa}\cdot\frac{R-r}{Rr}\sqrt{\frac{M^3}{FT}}.$$

Aperiodischer Zustand.

Damit der aperiodische Zustand eintrete, muss sein:

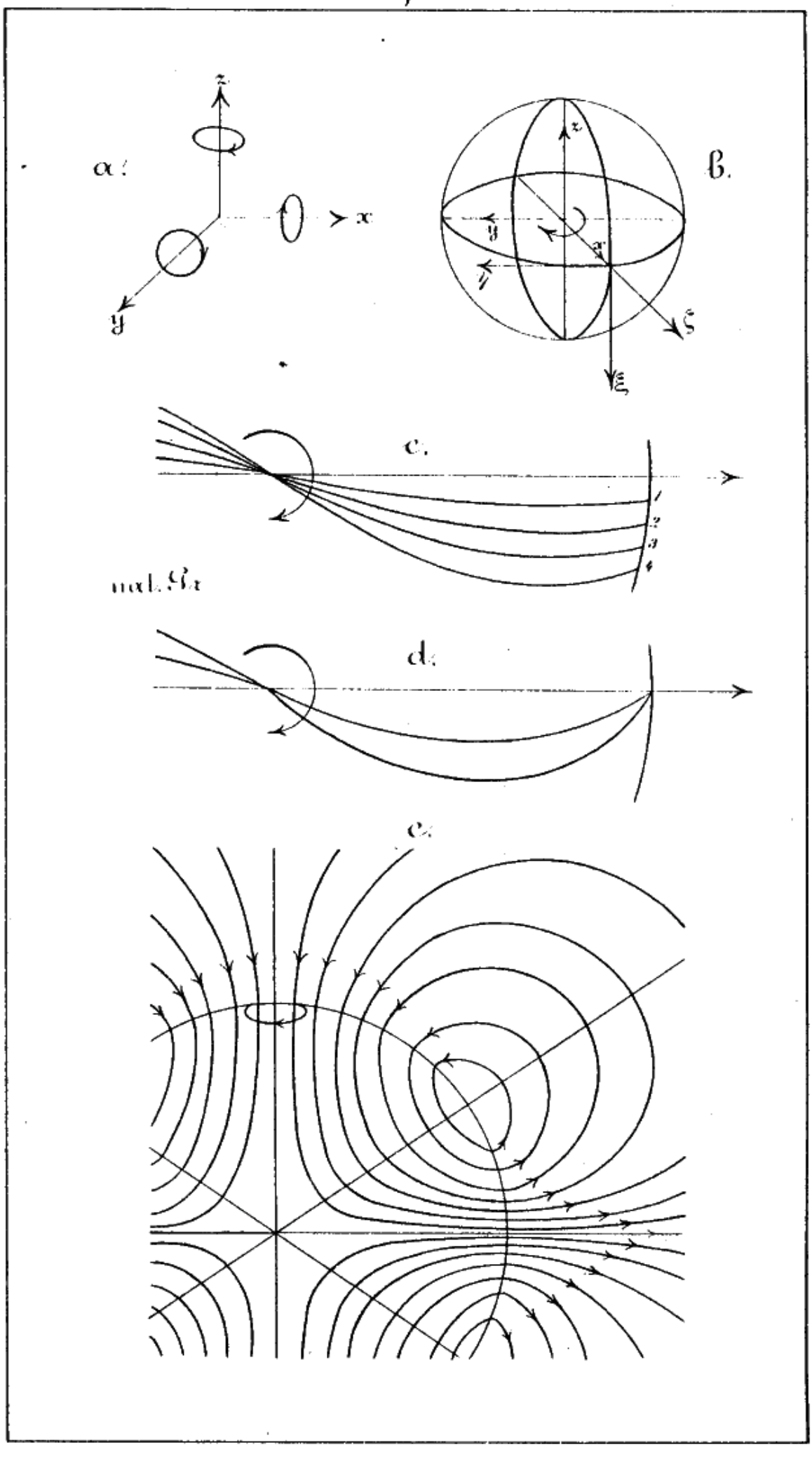
$$\varepsilon^2 > \frac{MT}{F},$$

oder:

$$\frac{R-r}{Rr} > \frac{3\varkappa}{4\pi}\sqrt{\frac{TF}{M^3}},$$

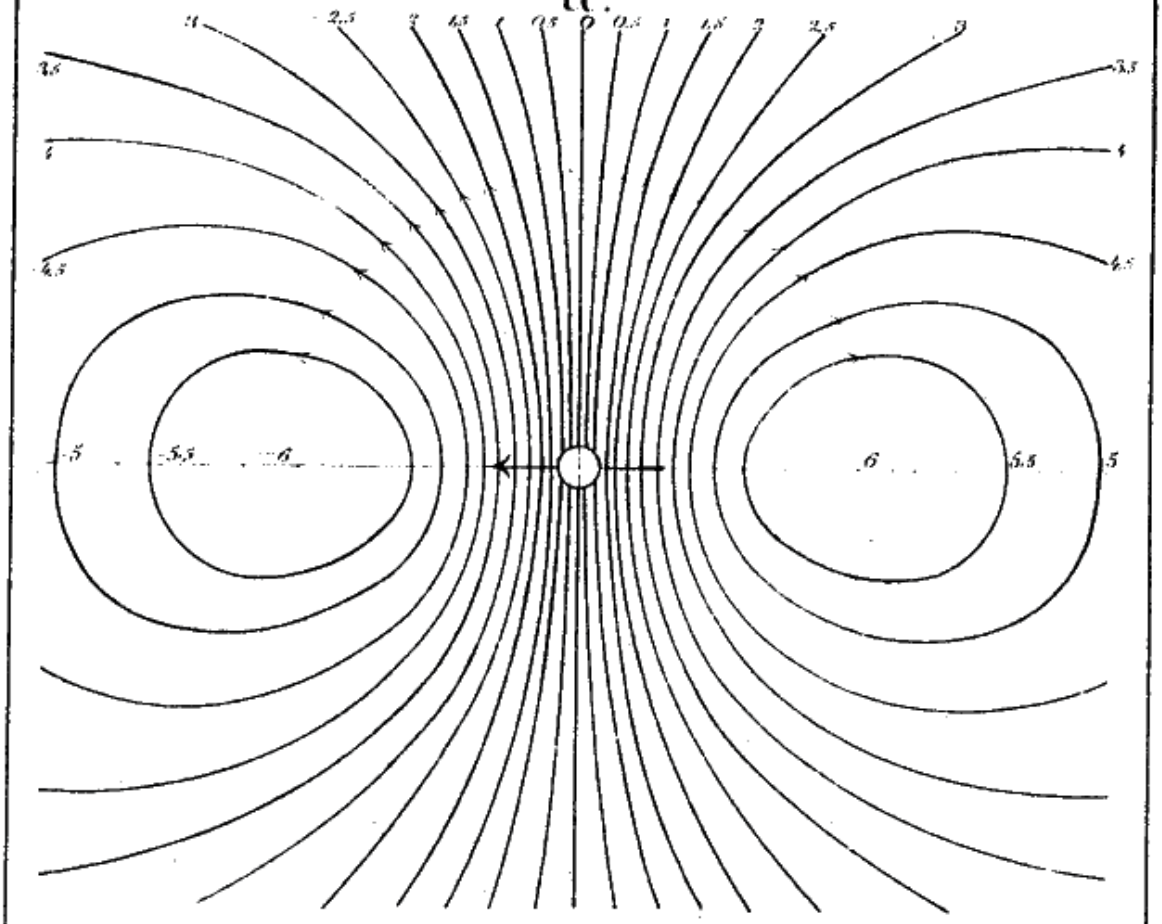
aus welcher Gleichung sich, bei gegebenen T, F, M, $\varkappa$ leicht die zur Erreichung des aperiodischen Zustandes nöthige Dicke eines Dämpfers berechnen lässt.

Taf. 1.



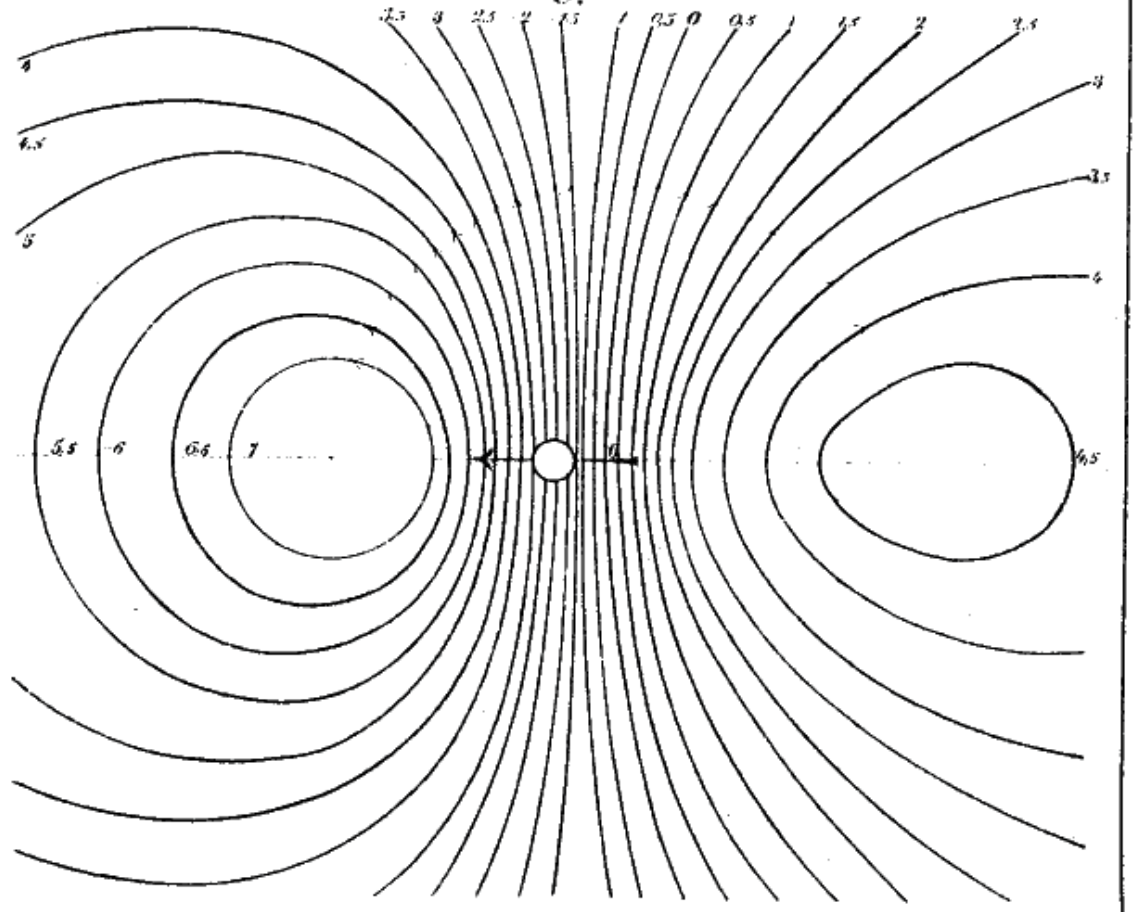
Taf. 2.

a.



Gerad linig bewegter Pol.

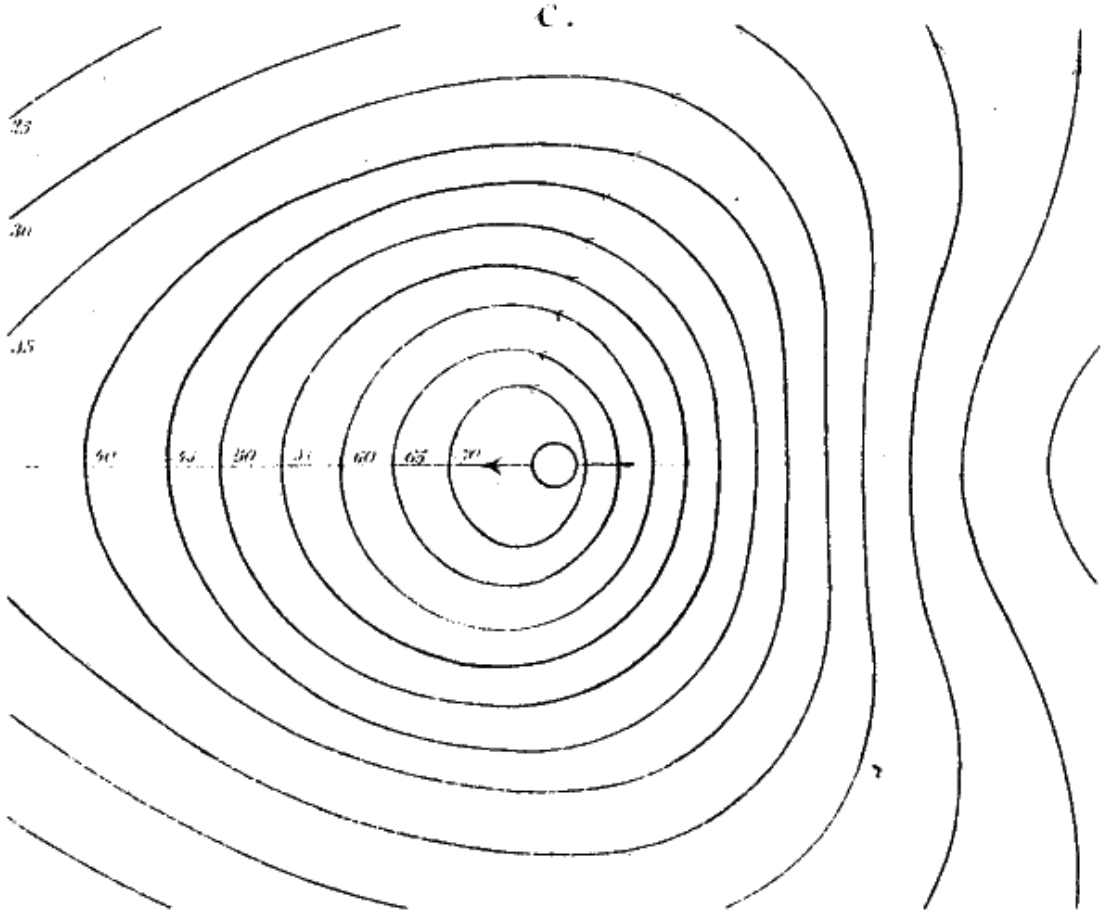
b.



2/3 nat. Gr.

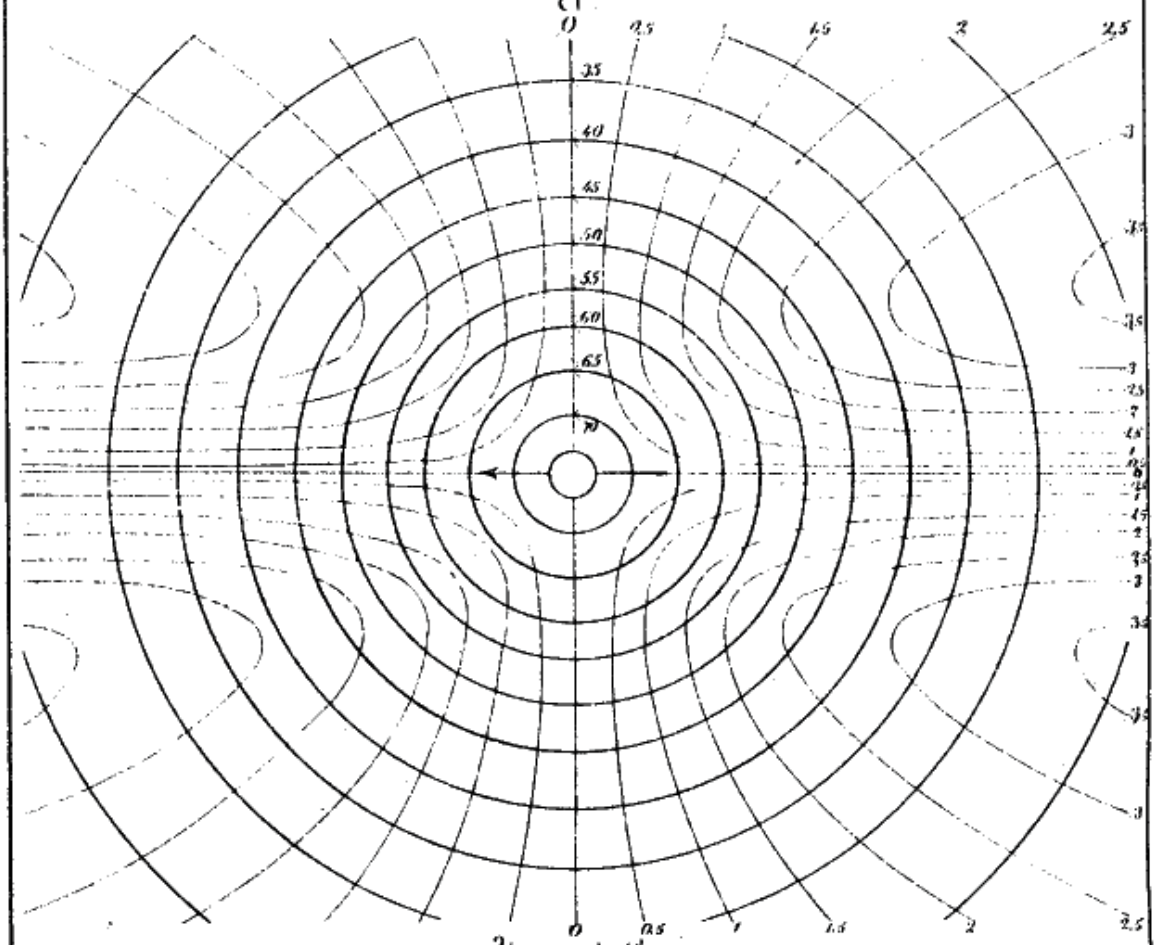
Taf. 3.

c.



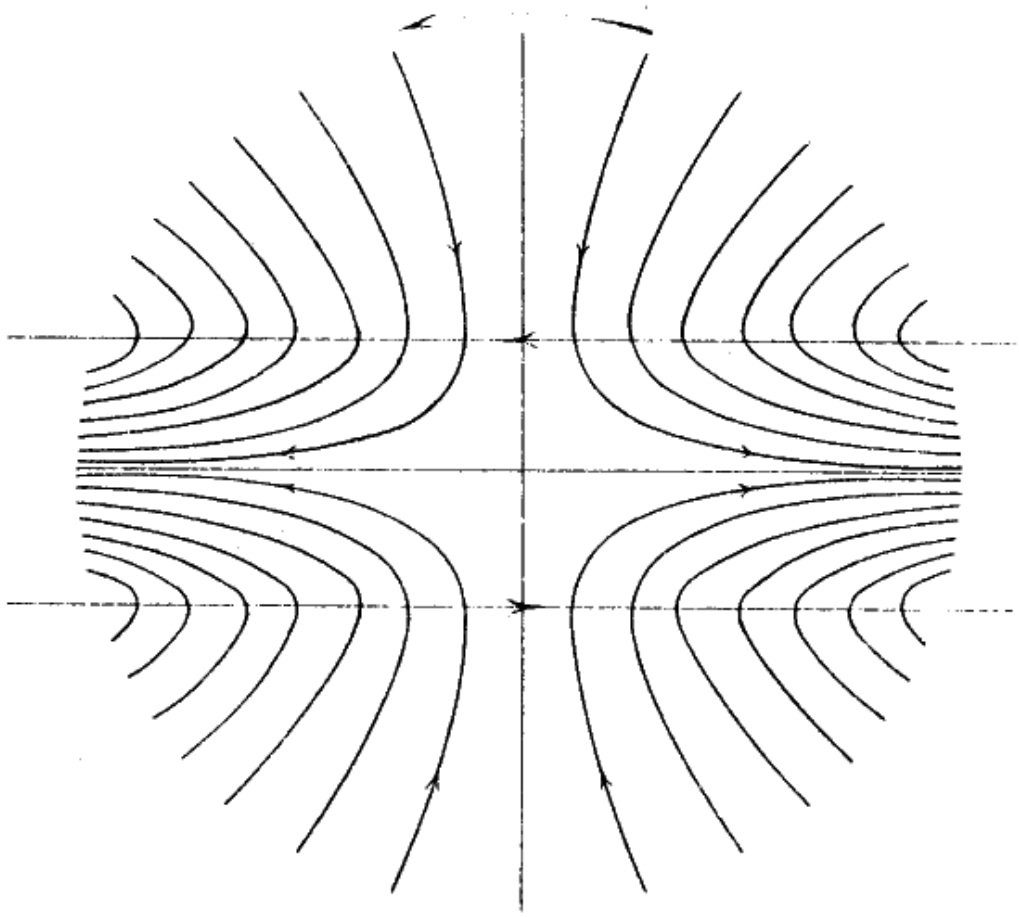
Geradlinig bewegter Pol.

d

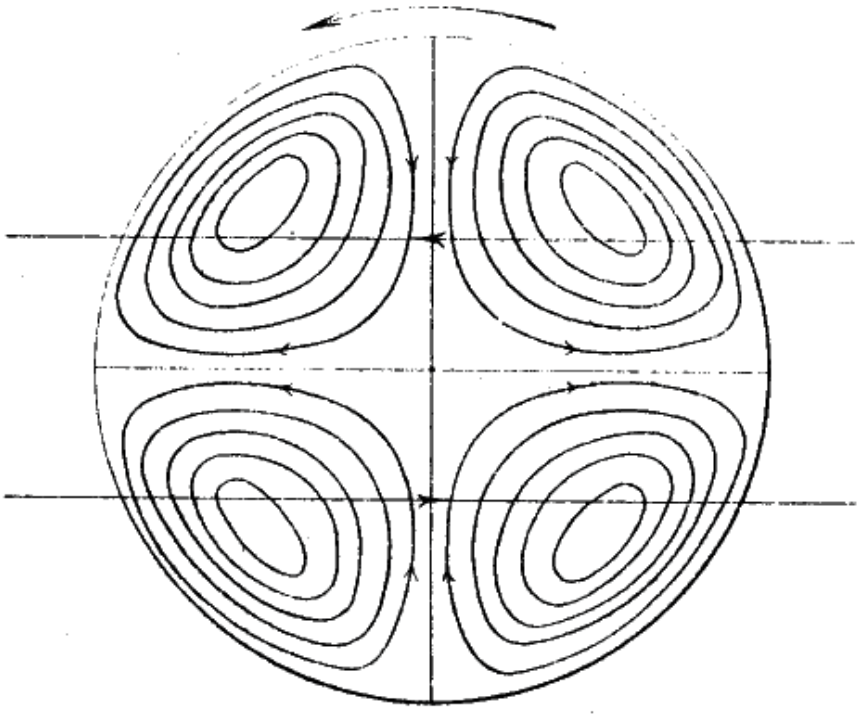


2/3 nat. Gr.

a.



Rotirende Scheibe und geradlinige Ströme.

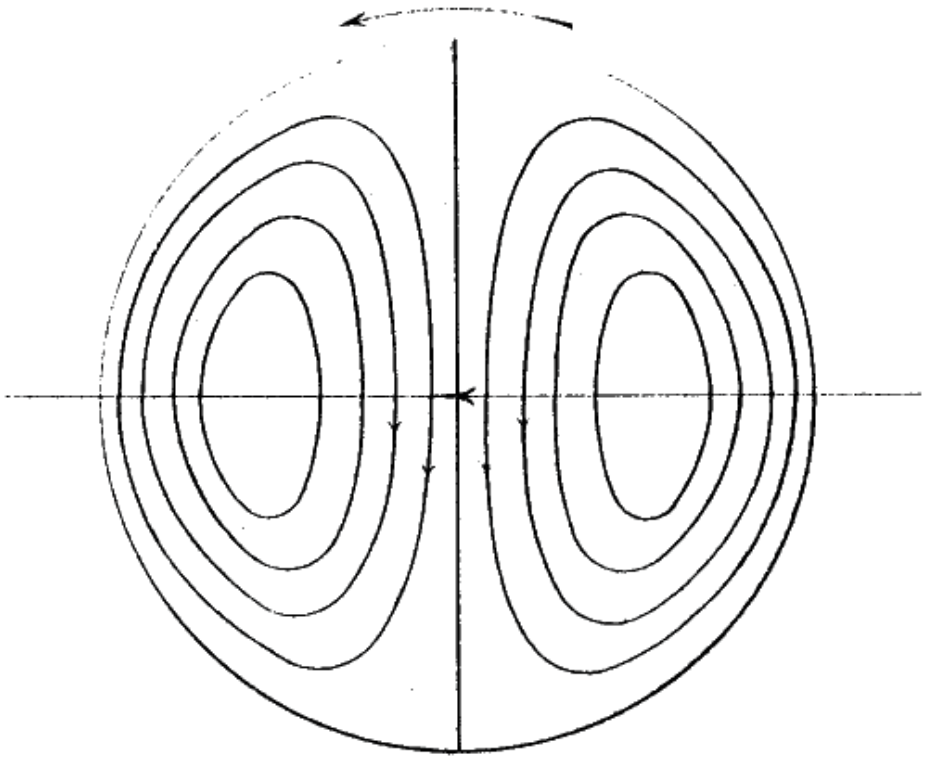


b.

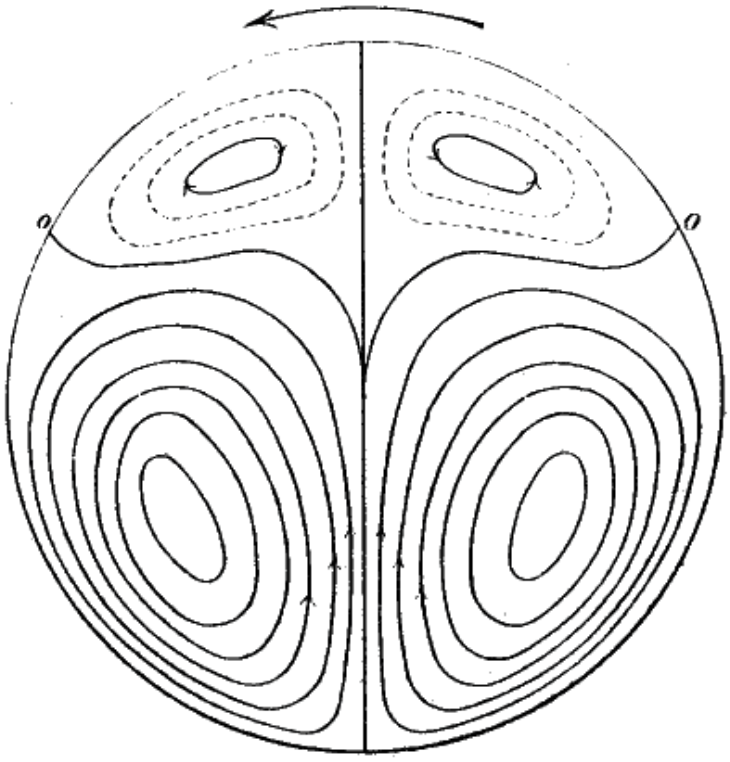
2/3 nat. Gr.

Taf. 5.

a.



Rotirende Scheibe und geradliniger Strom.

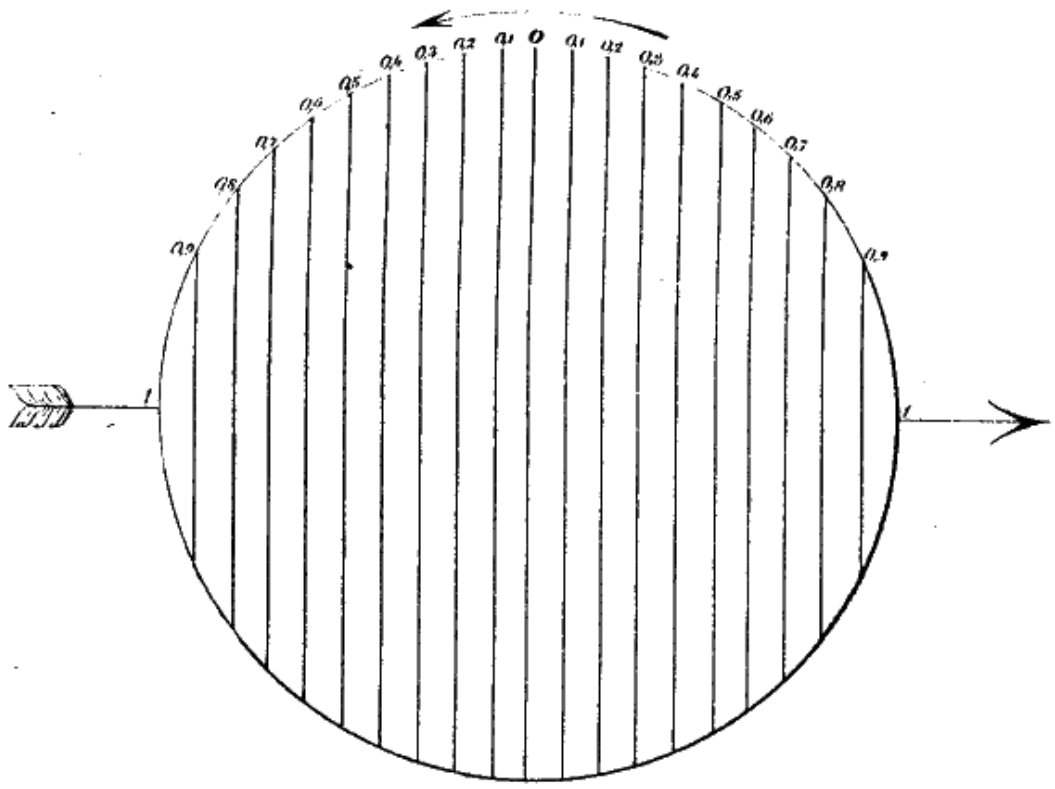


b.

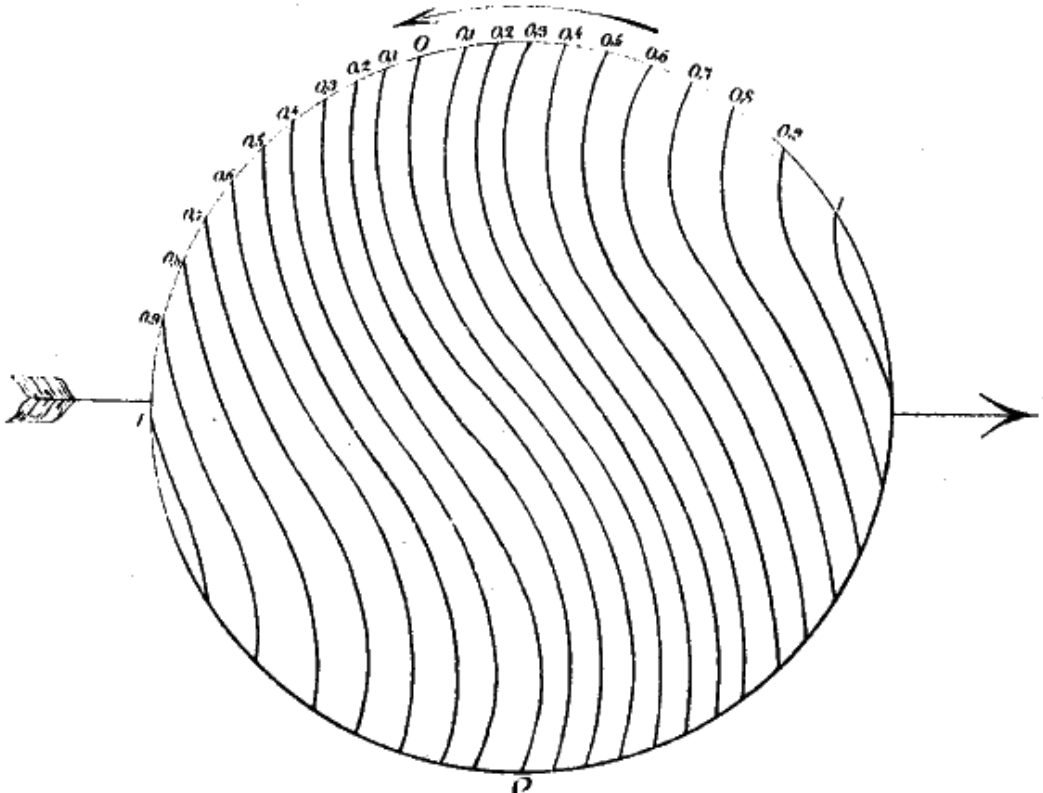
2/3 nat. Gr.

Taf. 6.

a.



Rotirende Kugeln.



b.

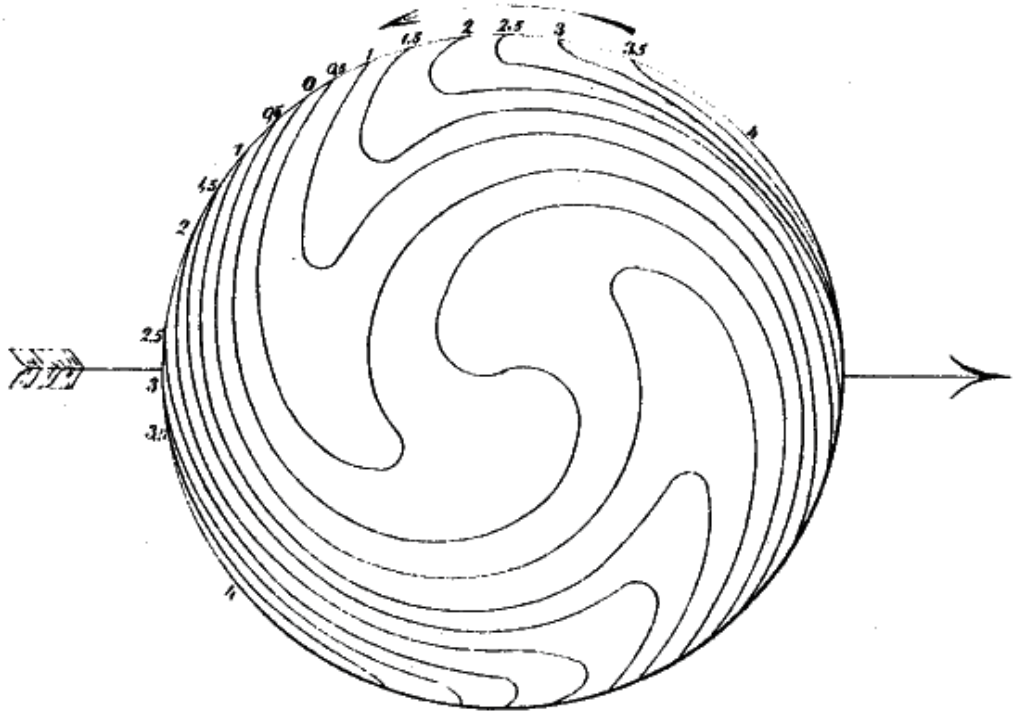
Kupferkugel,
5 Umdrehungen in der Secunde.
2/3 nat. Gr.

Taf. 7.

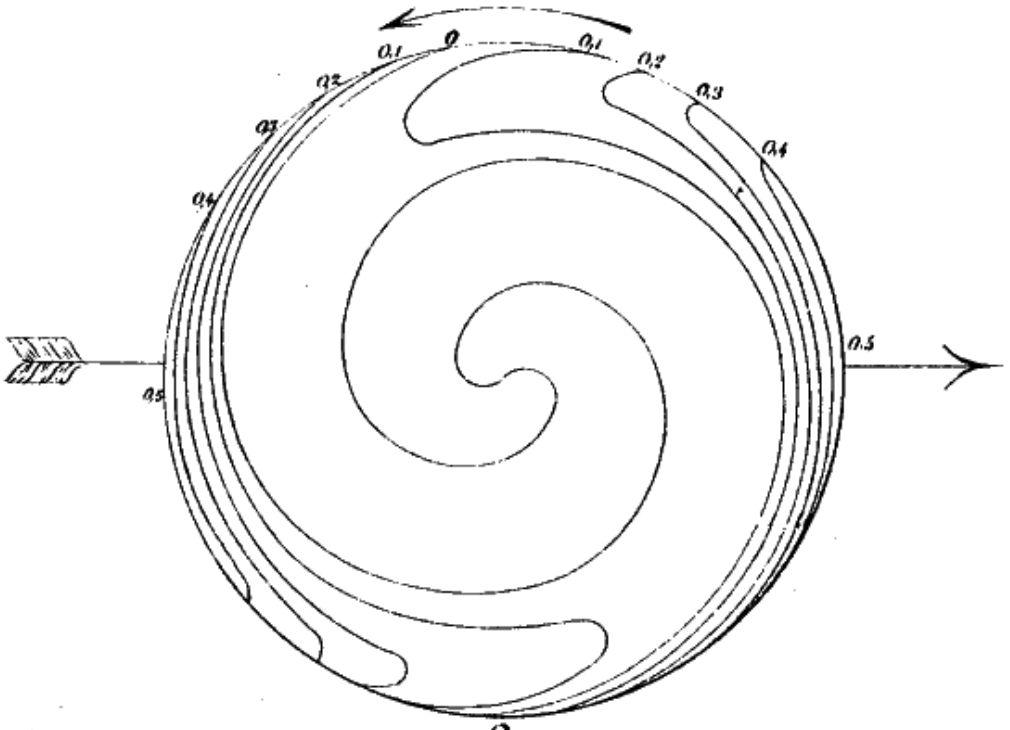
a.

Kupferkugel,

50 Umdrehungen in der Secunde.



Rotirende Kugeln.



b.

Eisenkugel,

5 Umdrehungen in der Secunde.

2/3 nat. Gr.

THESEN.

1. Ein Fehler von $^1/_{100}$ des wahren Werthes bildet die Grenze für die wünschenswerthe Genauigkeit, ein Fehler von $^1/_{1000}$ des wahren Werthes die Grenze für die mögliche Genauigkeit in der Bestimmung einer physikalischen Constanten; genauer als bis auf $^1/_{10000}$ ihres Werthes lässt sich kaum eine physikalische Constante auch nur definiren.

2. Obgleich es verfehlt sein würde, im Verlaufe einer Untersuchung eine vorgefasste Meinung beständig festzuhalten, so ist doch im Beginn der Untersuchung eine solche vorgefasste Meinung nicht nur nicht schädlich, sondern sogar nothwendig.

3. Die untergeordnete Stellung, welche in dem Gymnasialunterricht die Studien mathematischen und naturwissenschaftlichen Inhalts gegenüber den humanistischen Studien einnehmen, ist gerechtfertigt.

VITA.

Henricus Rudolphus Hertz Hamburgensis natus sum die XXII mensis Februarii a. h. s. LVII, patre Gustavo F. Hertz, I. U. D., matre Elisabetha, quos bona valetudine frui magnopere gaudeo. Fidem profiteor evangelicam.

Accepto a. h. s. LXXV, mense Martio, gymnasii Hamburgensis testimonio maturitatis, quum architecturae civili operam navare tunc mihi esset consilium, primum quidem Francofurti quotidiana exercitatione eius artis elementa addidici, ut praescribebant leges; deinde academias frequentavi polytechnicas Dresdensem et Berolinensem, ubi studiis incubui praecipue mathematicis et physicis. Militandi officium praestiti Berolini ab octobre anni LXXVI ad octobrem anni LXXVII. Ex quo tempore, immutato consilio, totum me tradidi studio scientiae physicae, interfui per bis sex menses in universitate Monacensi scholis, frequentavique per reliquum ad hunc diem tempus hanc academiam Berolinensem, a cuius ordine philosophorum etiam mihi delatum est praemium mense Augusto superioris anni.

Magistris glorior viris doctissimis: Aron, Baeyer, Beetz, Bezold, Borchardt, Fuhrmann, Helmholtz, Jolly, Königsberger, Kirchhoff, Kummer, Lösche, Narr, Pringsheim, Rüdorff, Schultze, Zeller.

Quibus omnibus optime de me meritis gratias ago maximas, imprimis viro illustrissimo Helmholtz, qui quod tempus exercitationibus laboratorii eius interfui, clementissimis semper me consiliis adiuvare et augere voluit.